Complexes & $\mathbb{R}$

16^{23} **Exo 1**

1 a) $z = \frac{1+i}{i} = -i - i^2 = -i + 1 = 1 - i$

1 b) $1 - i = 2\bar{z}$ / $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ / $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Exo 2

$i(1+i)z + w = 3i - 3i^2 = 3i + 3$

2 $w = 3i + 3 - i(1+i)z$

$(1-i)(3i+3) - (1-i)(1+i)iz + 2z = 6 - 8i$

2 $\cancel{3i} \cancel{+3} \cancel{+3} \cancel{-3i} - 2iz + 2z = \cancel{6} - 8i$

$z(2-2i) = -8i$ / $z = -\frac{8i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i}$

2 $z = \frac{-16i + 16}{8} = 2 - 2i$

$w = 3i + 3 - (i-1)(2-2i)$

$= 3i + 3 - (2i \cancel{+2} \cancel{-2} + 2i)$

2 $= 3i + 3 - 4i = 3 - i$

$\begin{cases} z = 2 - 2i \\ w = 3 - i \end{cases}$

16^{28} **Exo 3** 1 a) $(3+2i)(1-i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2$

$= 5 - i$

1 b) $\frac{-1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

1 c) $\frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i^2} = i$

1 d) $1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

16^{30}

Complexes & réels

EXO 4 $\quad i^{2n+1}$

1 $\quad i^{2n+1} = \begin{cases} i & \text{si } n = 2k \\ -i & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

1

$i \qquad n=0$

$i^3 = -i \qquad n=1$

$i^5 = i \qquad n=2$

$i^7 = -i \qquad n=3$

$i^9 = i$ 1 $\qquad n=4$

EXO 5 1 $\quad 2\mathcal{J}(x-yi+1) + 2i\mathcal{R}(-x+yi+1) = -1-i$

$-2y + 2i(1-x) = -1-i$

1 $\quad -2y + 2(1-x)\,i = -1-i$

1 $\quad -2y = -1 \;/\; 2(1-x) = -1$

$y = 1/2 \;/\; 1-x = -1/2 \;/\; 3/2 = x$

1 $\quad z = 3/2 + 1/2\, i$

EXO 6 $\quad z \in \mathbb{C} \quad z = x+yi$

$(x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$

2 $\quad = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$

16 [36]

Complexes & réels

(8) EXO 7

1 Soit b un majorant de A.

1 Supposons que $b < s$.

1 Soit $\varepsilon = s - b > 0$

1 Par hypothèse, $\exists\, a \in A \,/\, s - a < \varepsilon$

1 $\Rightarrow \quad s - a < s - b$

1 $\Leftrightarrow \quad -a < -b$

1 $\Leftrightarrow \quad a > b$ ce qui contredit le fait que b est un

1 majorant de A.

CQFD

(4) EXO 8

a) $\dfrac{m+n}{n} = \dfrac{m}{n} + 1$

2 $\sup = 2 \quad \inf = 1$

2 b) $\sup = 2/5 \quad \inf = 2/9$

Complexes & réels

(4) EXO 9 Par l'absurde :

1 Si $x \neq 0$, alors $|x| > 0$

2 Posons $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. Il est clair que $\varepsilon > 0$.

1 On a donc $|x| > \frac{|x|}{2} > \varepsilon > 0$

C'est une contradiction.

(10) EXO 10 2 a) minoré, non majoré

$\inf = \min = 1$

2 b) minoré, majoré dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

~~max~~, ~~sup~~, ~~min~~, ~~inf~~ dans $\mathbb{Q}$

2 c) borné, $\sup = 3$, $\inf = -3$

2 d) minoré, majoré

$\max = \sqrt{5}$ $\min = -\sqrt{5}$

2 e) $\min = 1$ $\sup = 2/\sqrt{2}$

borné

16/49