$\boxed{7.3}$ 3MR

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{6} = z-5 \\ \dfrac{y-4}{-6} = z-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6z - 23 \\ y = -6z + 26 \\ z = 1z + 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après le formulaire CRM,

$$\text{dist}(P; d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} \quad \text{avec } A \in d.$$

À l'aide de cette formule, on calcule la distance entre le centre de la sphère et la droite d:

$$A = (-23; 26; 0) \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{7.3}_2$ 3MR

$P = (3; 5; 10)$

$$\Rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} 26 \\ -21 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(P; d) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 26 \\ -21 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{\sqrt{3577}}{\sqrt{73}} = 7 > r = 5$$

La droite d ne coupe donc pas du tout la sphère Σ.

$\boxed{7.4}$ 3MR

On commence par calculer la distance du centre de la sphère au plan donné à l'aide de la formule standard:

$$\frac{|2\cdot 3-2(-2)-1+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{|6+4+8|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{18}{3} = 6$$

Vu que $6 < r = 10$, le plan coupe la sphère selon un cercle.

Le centre de ce cercle est donné par l'intersection entre la perpendiculaire

$\boxed{7.4}_2$ 3MR

au plan passant par le centre de la sphère et ce même plan.

Soit p cette perpendiculaire. On a

$$p: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(x;y;z) \in p \Leftrightarrow (x;y;z) = (3+2k;-2-2k;1-k)$$

On a de plus: $\pi: 2x-2y-z+9=0$

$$p \cap \pi: 2(3+2k)-2(-2-2k)-(1-k)+9=0$$

$$\Rightarrow 6+\cancel{4k}+4+\cancel{4k}-1+\cancel{k}+9=0$$

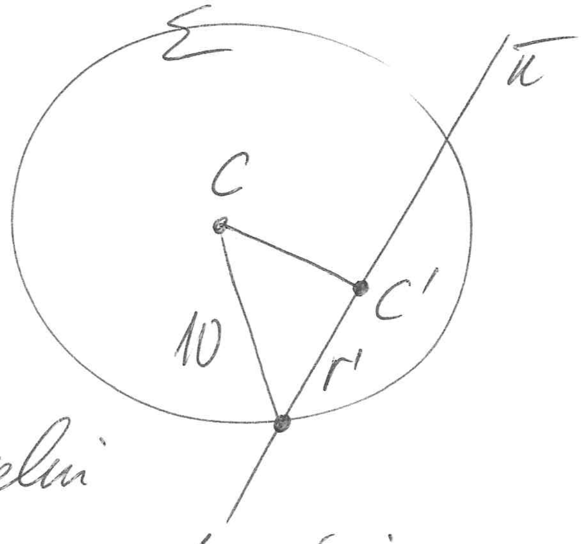
$$\Rightarrow 9k+18=0; \quad k=-2$$

$\boxed{7.4}_3$ 3MR

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ est le centre du cercle dont il est question.

Vue de profil, la situation est la suivante:



Notons C le centre de la sphère et C' celui du cercle. On peut écrire:

$$10^2 = \|\overrightarrow{CC'}\|^2 + (r')^2$$

$\boxed{7.4}_4$ 3MR

$$\vec{CC'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{CC'}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Rightarrow \quad 10^2 = 36 + (r')^2$$

$$\Rightarrow \quad r' = \sqrt{64} = 8$$

Le rayon du cercle vaut donc 8.

$\boxed{7.5}$ 3MR

$$x^2+y^2+z^2=81 \qquad \Sigma_1((0;0;0);9)$$

$$x^2-4x+y^2-12y+z^2+6z=-45$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=-45+49$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=4$$

$$\Sigma_2((2;6;-3);4)$$

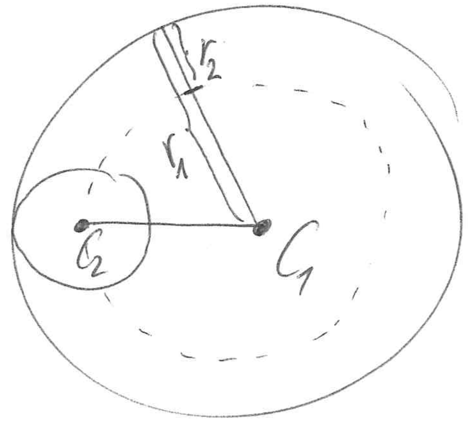
$$C_1=(0;0;0) \qquad C_2=(2;6;-3)$$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{C_1C_2}\|=\sqrt{4+36+9}$$

$$=\sqrt{49}=7$$

$\boxed{7.5}_2$ 3MR

Pour déterminer si les sphères sont tangentes intérieurement, on doit vérifier l'égalité suivante:



$$\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1 - r_2$$

$$7 = 9 - 2$$

Les sphères Σ_1 et Σ_2 sont donc bien tangentes intérieurement.