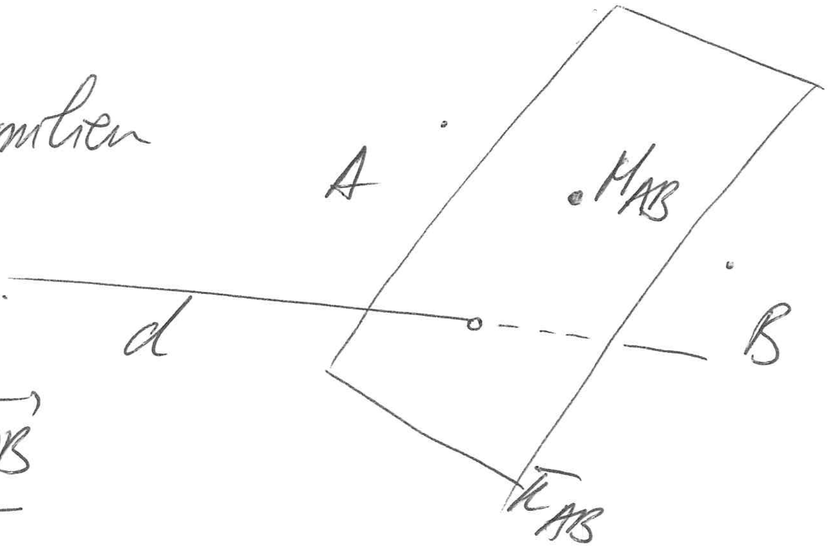
7.2

3MR

d) Le centre de la sphère est donné par l'intersection du plan médiateur π_{AB} du segment AB avec la droite d.

Soit M_{AB} le milieu du segment AB.



$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$= \left(\tfrac{3}{2} ; \tfrac{5}{2} ; -1\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \pi_{AB} : -5x + y + 4z + k = 0$$

$$M_{AB} \in \pi_{AB} \Rightarrow -5\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} - 4 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = 9 \quad \Rightarrow \boxed{\pi_{AB} : \underline{-5x + y + 4z + 9 = 0}}$$

$\boxed{7.2}_2$ 3MR

$\boxed{d \cap \pi_{AB} :}$

$$\begin{cases} -5x+y+4z+9=0 \\ x = 2-k \\ y = 3+2k \\ z = 7+2k \end{cases}$$

$\Rightarrow -5(2-k)+3+2k+4(7+2k)+9=0$

$\Leftrightarrow -10+\cancel{5k}+3+\cancel{2k}+28+\cancel{8k}+9=0$

$15k = -30 ; \quad k = -2$

$\Rightarrow \quad x = 4 \ ; \ y = -1 \ ; \ z = 3 \Rightarrow C(4;-1;3)$

$\Rightarrow \Sigma : (x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = r^2$

$r = \|\vec{AC}\|$, por exemple: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$r = \sqrt{45} \quad \Rightarrow \boxed{\Sigma : (x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 45}$

$\boxed{7.2}_3$ 3MR

e) On nomme d la droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On doit avoir : $dist\big((0;0;0) ; d\big) = r$

Dans les tables de la CRM, on trouve la formule suivante :

$$dist(P ; d) = \frac{\| \overrightarrow{AP} \times \vec{d} \|}{\| \vec{d} \|}$$

si $A \in d$ et que $\vec{d}$ est un vecteur directeur.

Dans notre cas : $P = (0;0;0)$ $A = (3;5;5)$

et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{7.2}_4$ 3MR

On peut donc écrire :

$$\text{dist}\left((0;0;0);d\right) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \Sigma : \; x^2+y^2+z^2 = \frac{350}{6}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+z^2 = \frac{175}{3}$$

$\boxed{7.2}_5$ 3MR

b) On a : $r = \text{dist}(C ; \pi)$

avec $C(4 ; 1 ; -5)$

et $\pi : x + 2y + 2z = 4$

$$\text{dist}(C ; \pi) = \frac{|4 + 2\cdot(1) + 2(-5) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma : (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}$$

$\boxed{7.2}_6$ 3MR

g) On commence par déterminer l'intersection des plans médiateurs des segments MN et MP.

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{milieu: } (1; 5/2; -7/2)$$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{milieu: } (5; 2; -6)$$

$\Rightarrow \pi_{MN}$: $2x - y + z + k = 0$ par $(1; 5/2; -7/2)$

$$2 - \frac{5}{2} - \frac{7}{2} + k = 0 \;/\; 2 - 6 + k = 0 \;/\; k = 4$$

π_{MN} : $2x - y + z + 4 = 0$

$\Rightarrow \pi_{MP}$: $5x - y - 2z + k = 0$ par $(5; 2; -6)$

$$25 - 2 + 12 + k = 0 \;/\; k = -35$$

$\boxed{7.2}$ 7 3MR

$\pi_{MP}: \quad 5x - y - 2z - 35 = 0$

(Pour info: $\pi_{NP}: \quad 8x - y - 5 - 74 = 0$

$\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad M_{NP} = \left(6 ; \frac{3}{2} ; -\frac{11}{2}\right)$)

On résoud $\begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ 5x - y - 2z - 35 = 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} 8x - y - 5z - 74 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = z + 13 \\ y = 3z + 30 \\ z = z \end{cases}$ C'est l'équation de la droite sur laquelle se trouvent tous les centres des sphères passant par M, N et P.

$\boxed{7.2}$ 8

3MR

Soit $C_k = (k+13\,;\ 3k+30\,;\ k)$ sur cette droite. Pour que C_k soit le centre d'une sphère passant par le point N, il faut que $\|\overrightarrow{NC_k}\| = 5\sqrt{2}$.

Cela nous donne donc l'équation :

$$\left\| \begin{pmatrix} k+11 \\ 3k+28 \\ k+3 \end{pmatrix} \right\|^2 = 50 \Leftrightarrow (k+11)^2 + (3k+28)^2 + (k+3)^2 = 50$$

$$\Leftrightarrow 11k^2 + 196k + 864 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+8)(11k+108) = 0 \Leftrightarrow k = \begin{cases} -8 \\ -108/11 \end{cases}$$

Il y a donc deux sphères possibles.

$\boxed{7.2}$ 3MR

9

$$C_{-8} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 : (x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50$$

$$C_{-\frac{108}{11}} = \begin{pmatrix} 35/11 \\ 6/11 \\ -108/11 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_2 : \left(x - \frac{35}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{6}{11}\right)^2 + \left(z + \frac{108}{11}\right)^2 = 50$$

3MR

Algèbre

Line3D

c: $X = (3.18, 0.55, -9.82) + \lambda\,(1.82, 5.45, 1.82)$

Plane3D

b: $6x + 18y + 6z = 30$

Point3D

$C_1 = (5, 6, -8)$

$C_2 = (3.18, 0.55, -9.82)$

$M = (0, 3, -4)$

$N = (2, 2, -3)$

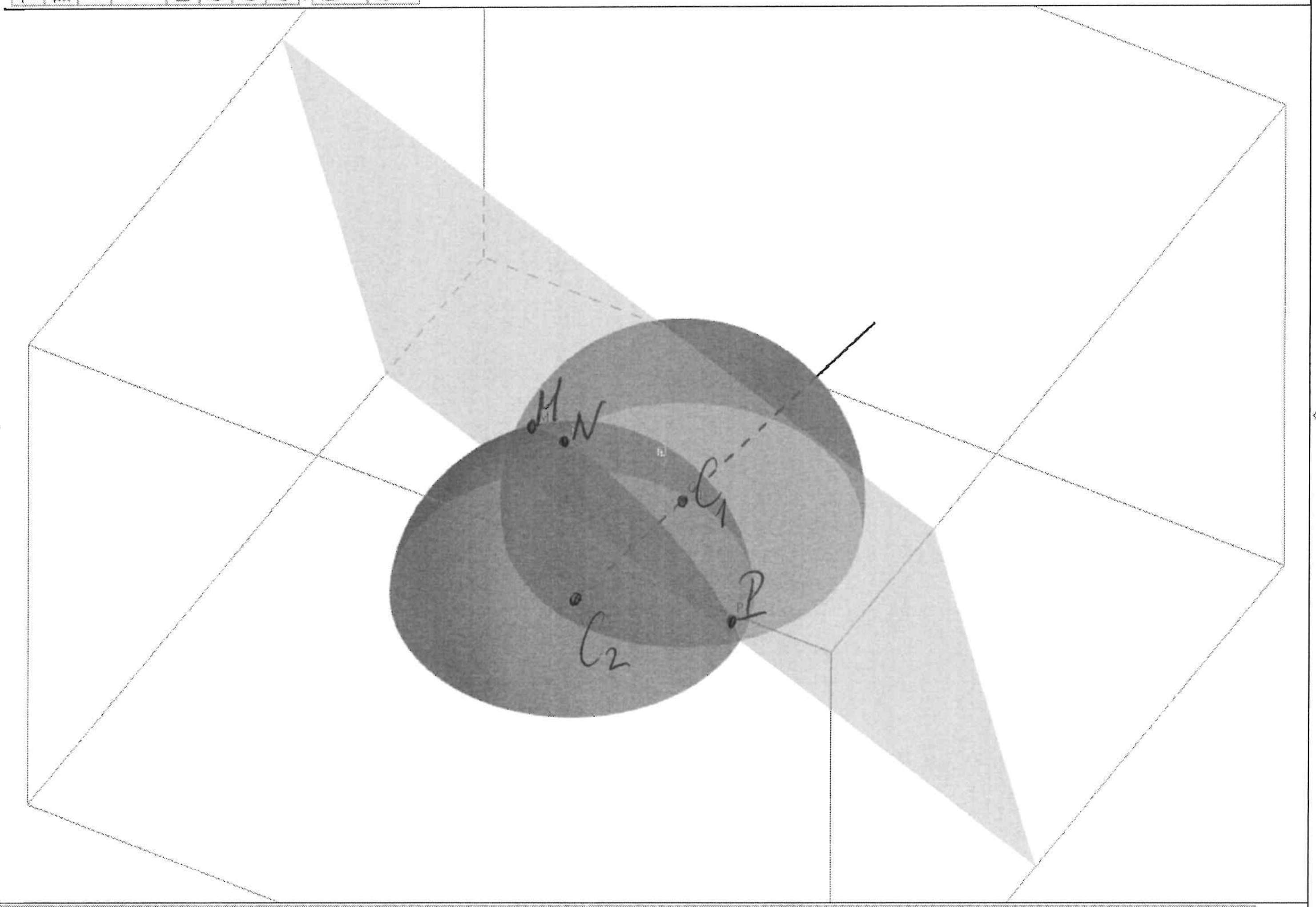
$P = (10, 1, -8)$

Sphère

a: $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 + (z + 8)^2 = 50$

d: $(x - 3.18)^2 + (y - 0.55)^2 + (z + 9.82)^2 = 50$

Graphique 3D



Saisie:

7.2

10