a) Vu que $ED(\ln) =]0; +\infty[$,

il faut que ce qui « est à l'intérieur »

soit strictement positif.

On peut donc écrire :

$$\ln(5x) \text{ existe } \Leftrightarrow 5x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}^{*} = ED(\ln)$$

$$(\ln(5x))' = \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{1}{5x} \cdot 5 \cdot (x)'$$

$$(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$= \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

b) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow x-1>0$

$\Leftrightarrow x>1$

$\Rightarrow \mathcal{D}_f =]1;+\infty[$

$$f'(x) = (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \cdot \overbrace{(x-1)'}^{1} = \frac{1}{x-1}$$

c) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 1-x>0$

$\Leftrightarrow 1>x \Leftrightarrow x<1$

$\Rightarrow \mathcal{D}_f =]-\infty;1[$

$$f'(x) = (\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' = \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$$

$$= -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

d) $\ln(|1-x|)$ existe $\Leftrightarrow |1-x| > 0$

$\Leftrightarrow 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Vu que $(\ln(|x|))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,$

on peut écrire:

$$(\ln(|1-x|))' = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)'$$

$$= \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} \quad \forall x \neq 1$$

On a donc $f'(x) = \frac{1}{x-1}$

e) Pour savoir si $x^2-x>0$, on doit déterminer le signe de x^2-x : $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$

		0		1	
	+	0	−	0	+

$\Rightarrow ED_f =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

$$f'(x) = \left(\ln(x^2-x)\right)' = \frac{1}{x^2-x} \cdot (x^2-x)'$$

$$= \frac{1}{x^2-x} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

f) Vu que $x^2-x = -(x-x^2)$, on peut écrire

$ED_f =]0;1[$

$$f'(x) = \left(\ln(x-x^2)\right)' = \frac{1}{x-x^2} \cdot (x-x^2)'$$

$$= \frac{1-2x}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

On multiplie par $\frac{-1}{-1} = 1$

g) $|x^2-x|>0 \Leftrightarrow x^2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$

$\Rightarrow ED_f = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

Vu que $\left[\ln(|g(x)|)\right]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour toute fonction g, pour tout x tq. $g(x) \neq 0$, on peut écrire :

$$\left(\ln(|x^2-x|)\right)' = \frac{(x^2-x)'}{x^2-x} = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

h) On détermine le signe de $\dfrac{x^2}{1-x}$:

La fonction x^2 est positive ou nulle pour $x=0$.

On a $1-x=0 \iff x=1$. On en déduit que

x		0		1	
	$+$	0	$+$	$\|$	$-$

est le signe de $\dfrac{x^2}{1-x}$.

$$\Rightarrow \mathcal{D}_f = \left]-\infty ; 1\right[\setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{1-x}} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x^2} \cdot \frac{2x(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}}{x^2} \cdot \frac{2x-2x^2+x^2}{\cancel{(1-x)}\cdot(1-x)} = \frac{2x-x^2}{x^2\cdot(1-x)}$$

$$= \frac{\cancel{x}\cdot(2-x)}{\cancel{x}\cdot x\cdot(1-x)} = \frac{2-x}{x(1-x)}$$

i) Il faut que $3-x^2>0$. Or, $3-x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Vu la forme

de la parabole $3-x^2$, on a $3-x^2>0$

$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$

$\Rightarrow ED_f =]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$

$$f'(x) = \left[\ln\left(\sqrt{3-x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \left(\sqrt{3-x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (3-x^2)'$$

$$= \frac{1}{2(3-x^2)} \cdot (-2x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(3-x^2)} = \frac{-x}{3-x^2}$$

j) $ED_f =]0;+\infty[$, car $3x^5 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^5} \cdot (3x^5)' = \frac{1}{\cancel{3}x^5} \cdot \cancel{3} \cdot 5x^4$$

$$= \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x}$$

k) $ED_f = ED(\ln) = \mathbb{R}_+^*$, car la fonction est construite à l'aide d'un ln, de la fonction x, d'une multiplication et d'une soustraction.

$$f'(x) = (x \cdot \ln(x) - x)' = (x \cdot \ln(x))' - (x)'$$

$$= (x)' \ln(x) + x \cdot (\ln(x))' - 1$$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1$$

$$= \ln(x)$$

e) $|\cos(x)| > 0 \Leftrightarrow \cos(x) \neq 0$

Or, $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

La fonction f est donc définie partout, sauf sur ces deux ensembles de points.

$$f'(x) = [\ln(|\cos(x)|)]' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (\cos(x))'$$

$$= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

m) f est définie si $x \in]0; +\infty[$

et si $\ln(x) \neq 0$. Vu que $\ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = e^0 = 1$, $ED_f =]0; +\infty[\setminus \{1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

n) On doit exclure les nombres négatifs ou nuls, et les solutions des équations : $x=0$ et $\ln(x)=0$.

On a donc $ED_f = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, comme à la question m). $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$f'(x) = -\frac{(x\ln(x))'}{x^2\ln^2(x)} = -\frac{\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{x^2\ln^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$= -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)}$$