$$f(x) = \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$$

① ED_{f}, zeros & signe

Vu que $ED(e^x) = \mathbb{R}$, le seul souci que l'on rencontre ici est une éventuelle division par zéro.

Il faut donc résoudre $1 - 3e^x = 0$ pour trouver les éventuels nombres à exclure.

$$1 - 3e^x = 0 \Leftrightarrow 1 = 3e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3^{-1}\right) = (-1) \cdot \ln(3)$$
$$= -\ln(3)$$

En conclusion, $f(x)$ existe ssi $x \neq -\ln(3)$

$$ED_f = \mathbb{R} - \left\{\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \mathbb{R} - \{-\ln(3)\}$$

La fonction étant de la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$, on sait que ses zeros sont les zeros de $A(x)$ qui ne sont pas des zeros de $B(x)$. En effet, $\frac{A(x_0)}{B(x_0)} = 0$

$\Rightarrow A(x_0) = 0$ et $B(x_0) \neq 0$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$.

On doit donc résoudre $e^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = -2$, ce qui n'est pas possible, vu que $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La fonction f n'admet donc pas de zero.

Le seul nombre qui figure dans le tableau des signes de f est donc

$$-\ln(3) \simeq -1,0986$$

x		$-1,099$	
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$

Les calculs ci-dessous aident à trouver le signe :

$$f(-2) = \frac{e^{(-2)}+2}{1-3e^{(-2)}} \simeq \frac{2,135}{1-0,406} \simeq \frac{2,135}{0,594}$$

$$\Rightarrow f(-2) > 0$$

$$f(0) = \frac{1+2}{1-3} = \frac{3}{-2} < 0$$

② Asymptotes

<u>Verticales:</u> Il faut étudier le comportement de f au voisinage du seul nombre exclu de $\mathbb{R}$:

$$x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \simeq -1{,}0986$$

En venant de la droite :

$$\lim_{\substack{x \to -1{,}0986 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1{,}0986 \\ >}} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \text{«} \frac{\overbrace{e^{-1{,}0986}}^{>0} + 2}{0^-} \text{»}$$

$$f(-1{,}09) = \frac{e^{-1{,}09} + 2}{1 - 3e^{-1{,}09}} \simeq \frac{0{,}336 + 2}{1 - 3 \cdot 0{,}336} \simeq \frac{2{,}336}{-0{,}00865}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to -1{,}0986 \\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1{,}0986 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1{,}0986 \\ <}} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \text{«} \frac{\overbrace{e^{-1{,}0986}}^{>0} + 2}{0^+} \text{»}$$

Car $f(-1{,}1) = \dfrac{e^{-1{,}1}+2}{1-3e^{-1{,}1}} \simeq \dfrac{2{,}333}{0{,}00139}$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to -1{,}0086 \\ <}} f(x) = +\infty$$

Il y a donc une A.V. en $x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$(x \simeq -1{,}0986)$

Horizontales:

À droite, vers $+\infty$:

INDÉTERMINÉ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+2}{1-3e^x} = \text{«} \frac{e^{+\infty}+2}{1-3e^{+\infty}} \text{»} = \text{«} \frac{+\infty}{-\infty} \text{»}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x+2)'}{(1-3e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{-3\cancel{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-3}$$

$= -\dfrac{1}{3}$ On a donc

une A.H. à droite en $y = -\dfrac{1}{3}$

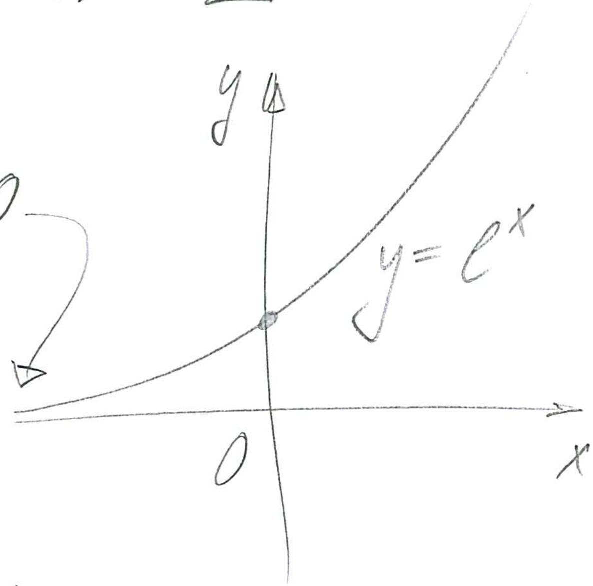
À gauche, vers $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \text{«} \frac{e^{-\infty} + 2}{1 - 3e^{-\infty}} \text{»}$$

$$= \text{«} \frac{0 + 2}{1 - 3 \cdot 0} \text{»}$$

$$= \text{«} \frac{2}{1} \text{»} = 2$$

Car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



Il y a donc une A.H. à gauche

en $y = 2$

3 Dérivée et croissance

$$f'(x) = \left(\frac{e^x+2}{1-3e^x}\right)' = \frac{(e^x+2)'(1-3e^x)-(e^x+2)(1-3e^x)'}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-3e^x) - (e^x+2)(-3\cdot e^x)}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x\cdot(1-3e^x) - (e^x+2)\cdot(-3)\cdot e^x}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-3e^x - (e^x+2)\cdot(-3))}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-3e^x-(-3)(e^x+2))}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-3e^x+3(e^x+2))}{(1-3e^x)^2} = \frac{e^x(1\cancel{-3e^x}\cancel{+3e^x}+6)}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{7\cdot e^x}{(1-3e^x)^2}$$

Trouvons maintenant $\mathcal{D}_{f'}$, les éventuels zeros et le signe de f'.

On voit que $f'(x)$ n'est pas définie si $x = \ln(1/3) = -\ln(3)$

(Voir l'étude de $\mathcal{D}_f$ plus haut)

$\Rightarrow \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} - \{-\ln(3)\}$

Pour les zeros, on doit résoudre

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2} \Rightarrow 7e^x = 0$$

Cette équation n'admet pas de solution, vu que $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La dérivée de f n'a pas de zeros.

Nous disposons de toutes les informations nécessaires pour établir le tableau des signes de f' qui donne la croissance de f.

$$-\ln(3) \simeq -1{,}0986$$

x		
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

La fonction f ne fait que de croître

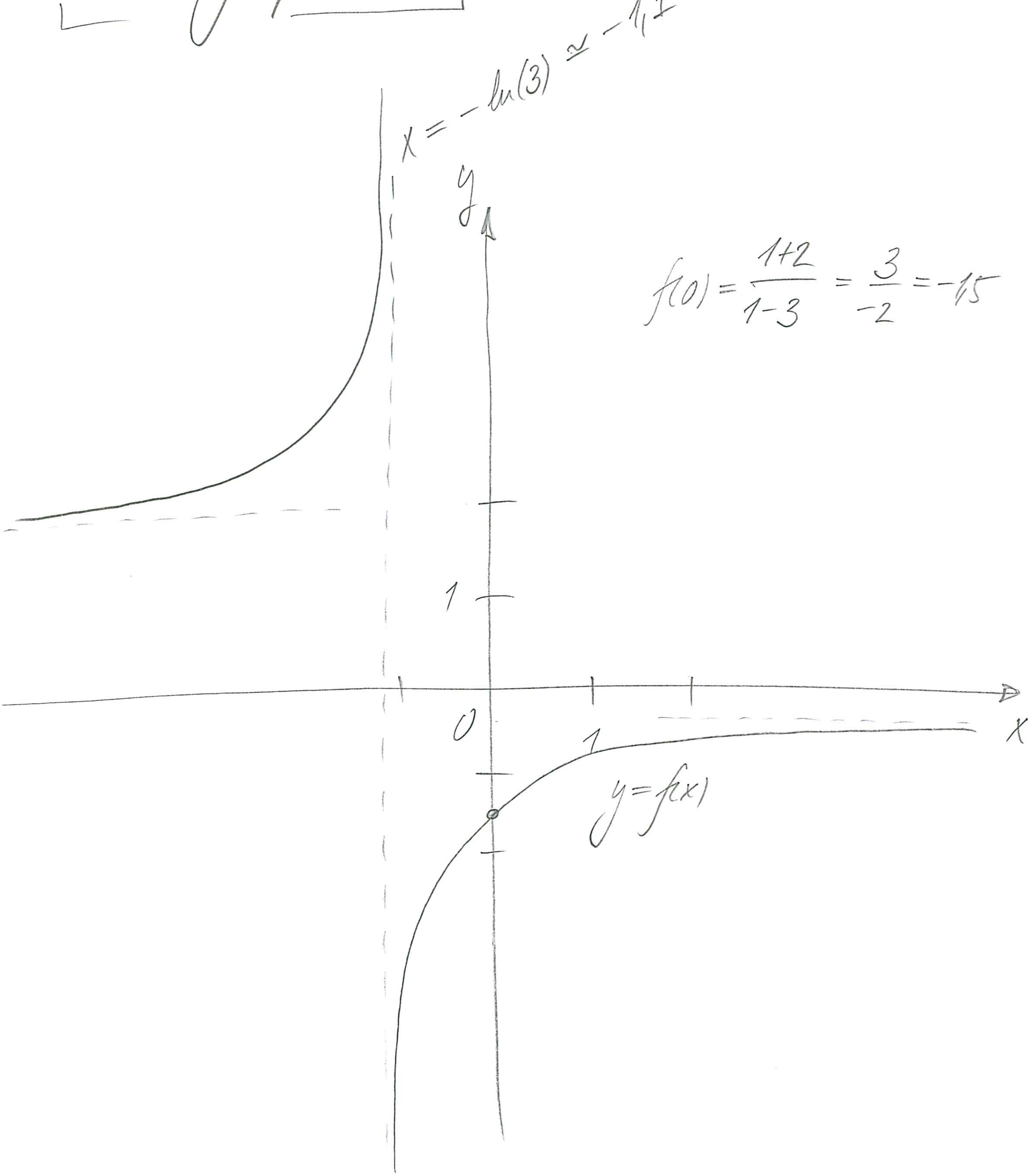
Explication : Vu que $f'(x) = \dfrac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$

que $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{D}_f$, et que $(1-3e^x)^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{D}_f$,

on a bien $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}_{f'}$

La fonction f n'admet donc pas de minimum, de maximum ou de palier.

4 Graphe



$$f(0) = \frac{1+2}{1-3} = \frac{3}{-2} = -1{,}5$$