$f(x) = e^{-x^2}$ à étudier

1 Ensemble de définition, zéros & signe

Vu que $ED(e^x) = \mathbb{R}$ et que $ED(-x^2) = \mathbb{R}$,

on a $ED_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} = 0$ Or, $e^t \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

La fonction f n'a pas de zeros.

Signe :

x	
$f(x)$	$+$

② Asymptotes :

<u>Verticales</u> : $ED_f = \mathbb{R}$, il n'y a donc pas d'asymptotes verticales.

Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = « e^{-(+\infty)^2} »$$

$$= « e^{-(+\infty)} » = « e^{-\infty} » = 0$$

On a donc une A. H. à droite en

$y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \text{«} e^{-(-\infty)^2} \text{»}$$

$$= \text{«} e^{-(+\infty)} \text{»} = \text{«} e^{-\infty} \text{»}$$

$$= 0$$

Il y a donc une A.H. à gauche

en $y = 0$

Obliques : Vu qu'il y a une asymptote horizontale à gauche et à droite en $y = 0$, il n'y a pas d'asymptote oblique.

③ Dérivée et croissance

motif $(e^u)' = e^u \cdot u'$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-1) \cdot 2x$$

$$= -2x \cdot e^{-x^2}$$

Vu que $D_f = \mathbb{R}$ et que $D(-2x) = \mathbb{R}$, on a $D_{f'} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \iff -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \iff -2x = 0$$

car $e^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 0 \iff x = 0}$$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

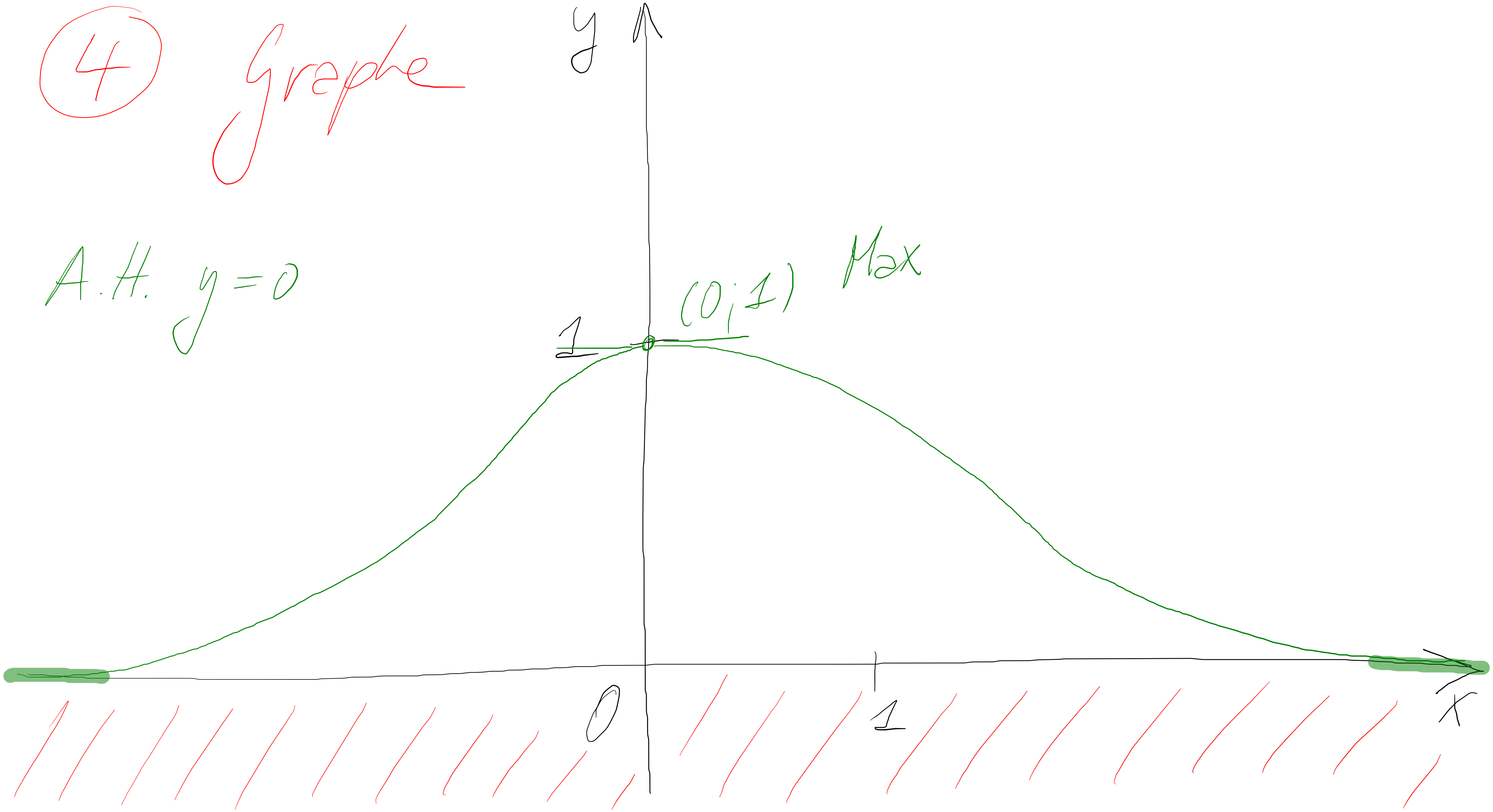
$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

La fonction f admet donc un maximum en $(0; f(0))$.

$$f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ Les coordonnées du maximum sont $(0; 1)$

④ Graphe



$f(x) = (x^2 - 4x + 4)\, e^x$ à étudier.

1 Ensemble de définition, zéros & signe

$$\left.\begin{array}{l} ED(x^2-4x+4) = \mathbb{R} \\ ED(e^x) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow ED_f = \mathbb{R}$$

$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$+$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x = \underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}\underbrace{e^x}_{>0}$$

② Asymptotes.

Verticales : Vu que $D_f = \mathbb{R}$, il ne peut pas y avoir d'asymptotes verticales.

Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x^2-4x+4)}\, e^x = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^x$$

On peut négliger tous les termes du polynôme sauf celui de plus haut degré...

$$= \text{« } +\infty \cdot +\infty \text{ »} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'A. H. à droite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-4x+4)e^x = \lim_{x\to-\infty} x^2\cdot e^x$$

$$= \ll (-\infty)^2 \cdot e^{-\infty} \gg = \ll +\infty \cdot 0 \gg$$

INDÉTERMINÉ

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-4x+4)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{e^{-x}\cdot(-x)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{e^{-x}\cdot(-1)}$$

$$= \ll \frac{-\infty}{e^{-(-\infty)}\cdot(-1)} \gg = \ll \frac{-\infty}{-e^{+\infty}} \gg = \ll \frac{-\infty}{-\infty} \gg$$

IND.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(2x-4)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-(e^{-x} \cdot (-1))}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \text{«} \frac{2}{e^{-(-\infty)}} \text{»}$$

$$= \text{«} \frac{2}{e^{+\infty}} \text{»} = 0$$

B.-H.

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

On a donc une asymptote horizontale à gauche

en $y = 0$

On a vu qu'il n'y a pas d'A.H. à droite.

Voyons s'il existe une <u>Oblique</u> :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 4x + 4)\, e^x}{x} = \ll \frac{+\infty}{+\infty} \gg$$

INDÉTERMINÉ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left((x^2-4x+4)\cdot e^x\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-4)e^x+(x^2-4x+4)e^x}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (2x-4)e^x+(x^2-4x+4)e^x = « +\infty + \infty »$$

$= +\infty$ Il n'y a pas d'A.O. non plus, de ce côté!

En résumé :

~~A. V.~~

A. H. à gauche en $y = 0$

~~A. H. à droite~~

~~A. O. à droite~~

3 Dérivée et croissance

$$f'(x) = \left((x^2-4x+4)e^x\right)' = (x^2-4x+4)'e^x$$
$$+ (x^2-4x+4)(e^x)'$$

$$= (2x-4)e^x + (x^2-4x+4)e^x = e^x \cdot (2x\cancel{-4}+x^2\cancel{-4x+4})$$

$$= e^x(x^2-2x) = e^x \cdot x \cdot (x-2)$$

On a donc $f'(x) = 0 \iff e^x \cdot x \cdot (x-2) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

On a donc un maximum en $(0; f(0))$

et un minimum en $(2; f(2))$.

Max : $\left(0; (0^2 - 4 \cdot 0 + 4) \cdot e^0\right) = (0; 4)$

Min : $\left(2; \underbrace{(4 - 8 + 4)}_{=0} \cdot e^2\right) = (2; 0)$

4 Esquisse du graphe :