

$$\frac{1}{x^4 - 3x^3} = \frac{1}{x^3(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x-3}$$

① Multiplions par $x-3$ et posons $x=3$:

$$\frac{1}{x^3} = d + (x-3) \cdot \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right)$$

$$\frac{1}{3^3} = d + 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{27}$$

② Multiplions par x^3 et posons $x=0$:

$$\frac{1}{x-3} = c + ax^2 + bx + \frac{1}{27} \cdot \frac{x^3}{x-3}$$

$$\frac{1}{-3} = c$$

③ Multiplions par x et passons à la limite ($x \rightarrow \infty$):

$$\frac{1}{x^2(x-3)} = 2 + \frac{b}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{27} \cdot \frac{x}{x-3}$$

$$0 = 2 + 0 - 0 + \frac{1}{27} \cdot 1$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{1}{27}$$

④ On pose finalement $x=1$

$$\frac{1}{1^3(-2)} = -\frac{1}{27} + b - \frac{1}{3} - \frac{1}{54}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1+6-9}{18} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4-3x^3} = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{x-3}$$

On peut donc écrire:

$$\int \frac{1}{x^4 - 3x^3} dx = \frac{1}{27} (\ln|x-3| - \ln|x|) + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^2} + C$$

$$= \frac{1}{27} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + \frac{1}{18} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^3} \right) + C$$