a) $ED(e^x) = \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ED(e^{5x}) = \mathbb{R}$
$ED(5x) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(e^{5x}\right)' = e^{5x} \cdot (5x)' = e^{5x} \cdot 5 \cdot (x)'$$
$$= e^{5x} \cdot 5 \cdot 1 = \underline{\underline{5e^{5x}}}$$

b) L'exponentielle ne pose pas de problème, son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$ED(x^2) = \mathbb{R} \Rightarrow ED(e^{x^2}) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{2x \cdot e^{x^2}}}$$

c) Si $x=0$, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini.

Autrement dit, $ED\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Donc, $ED\left(e^{1/x}\right) = \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \left(e^{1/x}\right)' = e^{1/x} \cdot \left(1/x\right)'$$

$$= e^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \underline{\underline{e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}}$$

Motif de dérivation

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

d) $\sqrt{x^2+x}$ est définie si et seulement si $x^2+x \geqslant 0$. On doit donc déterminer <u>le signe</u> de x^2+x

$$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}$$

x		-1		0	
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \quad x^2+x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[0; +\infty\right[$$

$$\Rightarrow \quad ED\left(e^{\sqrt{x^2+x}}\right) = \left]-\infty; -1\right] \cup \left[0; +\infty\right[$$

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x^2+x}}\right)' = e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(\sqrt{x^2+x}\right)'$$

$$= e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(x^2+x\right)'$$

$$= e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (2x+1)$$

On doit utiliser ici deux fois le « motif de la dérivée interne » : une première fois pour la fonction $\sqrt{x^2+x}$ qui est à l'intérieur de $e^{(\;)}$ et une autre fois pour la fonction x^2+x qui est à l'intérieur de la $\sqrt{}$.

e) $\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ existe uniquement si $\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0$. Il faut donc étudier le signe de cette fonction

tjrs positif!

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x)(1-x)}$$

$x = \pm 1$ est à exclure

x		-1		1	
$\frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$

$$\Rightarrow \quad ED\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) =]-1;1[$$

$$\Rightarrow \quad ED\left(\exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\right) =]-1;1[$$

$$\exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)'$$

$$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'}$$

On calcule ceci à part

$\boxed{\text{MOTIF}: \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$

$$\frac{(1+x^2)'(1-x^2)-(1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{2x(1-x^2)+2x\cdot(1+x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{2x(1\cancel{-x^2}+1\cancel{+x^2})}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x}{(1-x^2)^2}$$

$$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$$

$$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3 \cdot (1+x^2)}}$$

On peut s'arrêter ici…

f) $ED(\sin(x)) = \mathbb{R}$

$\Rightarrow ED(e^{\sin(x)}) = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot (\sin(x))'$

$= e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

Cf. tables de dérivation

g) $ED(x^2 \cdot e^x) = \mathbb{R}$ (polynôme · exp)

$(x^2 e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$= 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

$= (x^2 + 2x) e^x$

h)

$$\left.\begin{array}{l} ED(-x) = \mathbb{R} \\ ED(\cos x) = \mathbb{R} \\ ED(e^{x}) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = \left(e^{-x} \cdot \cos x\right)' = (e^{-x})' \cos x + e^{-x} (\cos x)'$$

D'après les tables, $(\cos x)' = -\sin x$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x} \cdot \underbrace{(-x)'}_{-1} \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x)$$

$$= -\cos x \cdot e^{-x} - \sin x \cdot e^{-x} = \underline{\underline{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}}$$