g) $$A - 3\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Trouver une base du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ revient à déterminer une base du noyau de $A - 3I_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base cherchée est donc : $(-2;1;0),(-3;0;1)$

Le sous-espace propre associé à $\lambda=3$ est de dimension 2.

h) $A-4\cdot I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche une base du noyau de cette matrice.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$ Après quelques opérations sur les lignes.

$$\begin{cases} -x_1+2x_3=0 \\ -x_2+3x_3=0 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=2x_3 \\ x_2=3x_3 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$

La base cherchée est donc :

$$(2;3;1;0),\ (0;0;0;1)$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 4$ est un plan.