3MR

a) $\det\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-1)\cdot x - 0\cdot 2$

$= x(x-1)$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$

$\boxed{E_{\lambda_1}:}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x+2y=0$ $\quad \begin{cases} x = 2y \\ y = y \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{E_{\lambda_2}:}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$ et $x = x$

3MR

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

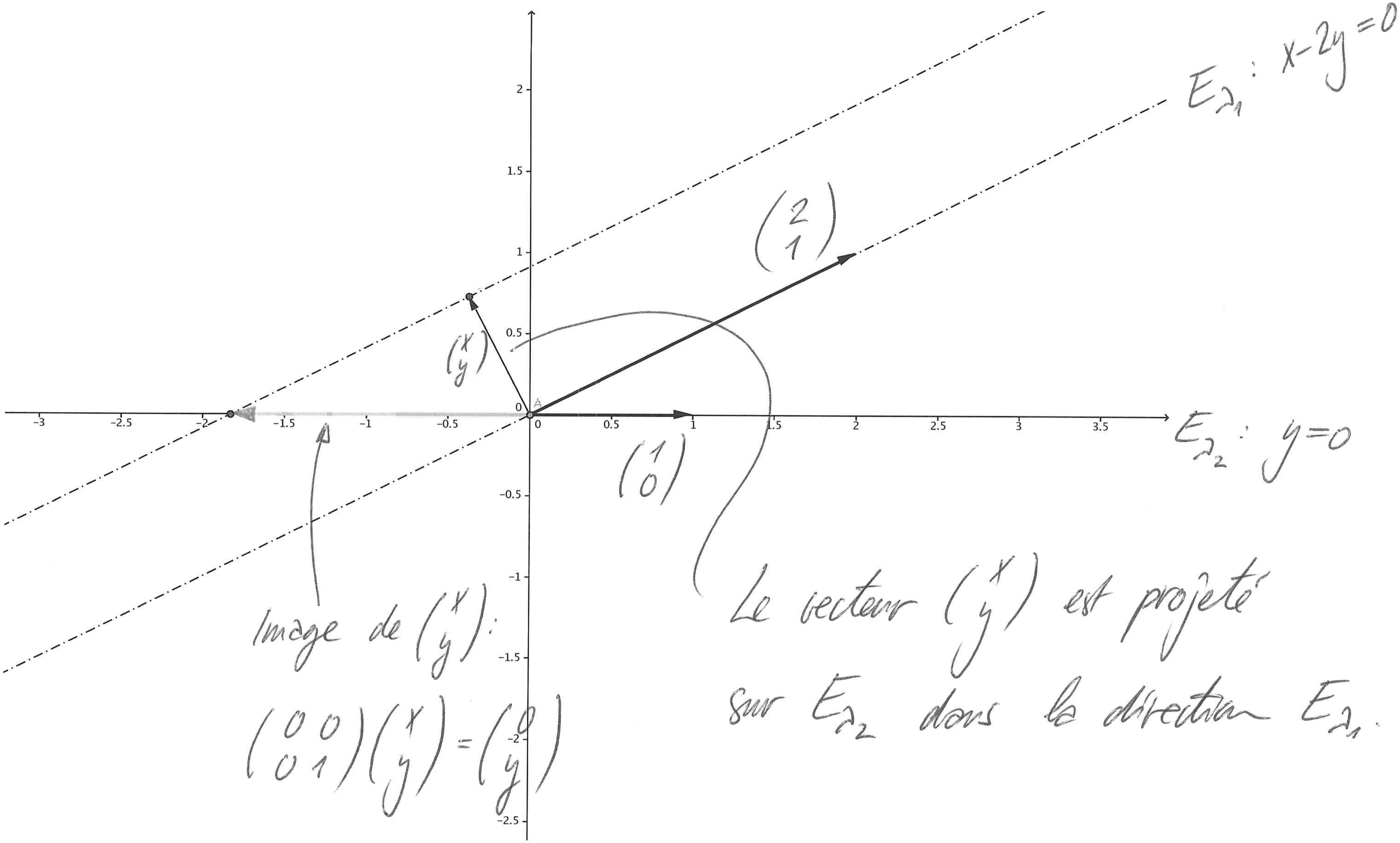
La matrice de cet endomorphisme est

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Il s'agit d'une <u>projection</u> dans une certaine direction.

En effet, dans la base $\mathcal{B}$, l'application s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

L'image d'un vecteur quelconque du plan sera sa projection sur l'axe $Ox = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ dans la direction du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



$E_{\lambda_1} : x - 2y = 0$
$E_{\lambda_2} : y = 0$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
A
Image de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$
Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est projeté
sur E_{λ_2} dans la direction E_{λ_1}.

3MR

b) $\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -2\sqrt{3} & x+1 \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$\boxed{E_{\lambda_1}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\,x + 2y = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,x = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x \\ y = \sqrt{3}\,x \end{array}$

$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{E_{\lambda_2}}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0, \; y = y \qquad E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

3MR

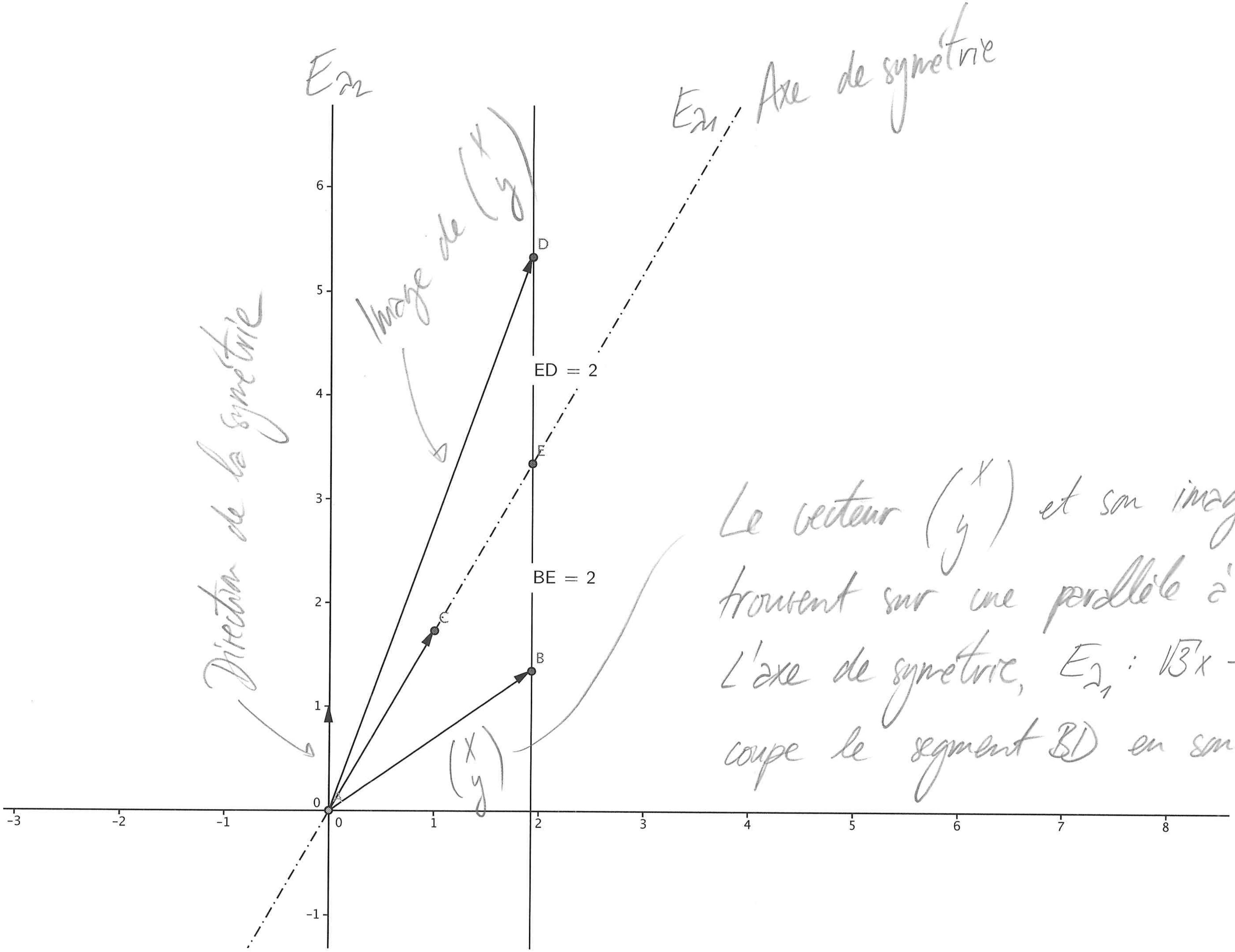
Dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice de l'application s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit, dans $\mathbb{R}^2$, de la symétrie relativement à l'axe $E_{\lambda_1} : \sqrt{3}\,x - 2y = 0$ dans la direction de $E_{\lambda_2} : x = 0$

Dans cette base, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

C'est à cela qu'on voit qu'il s'agit d'une symétrie.



Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et son image se trouvent sur une parallèle à Oy. L'axe de symétrie, $E_{21} : \sqrt{3}x - 2y = 0$, coupe le segment BD en son milieu.

3MR

d) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

donné par sa matrice

$$H = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique:

$$\det(x \cdot I_3 - H) = \det\begin{pmatrix} x-5 & 8 & 4 \\ -8 & x+15 & 8 \\ 10 & -20 & x-11 \end{pmatrix}$$

$$= x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$

Les deux valeurs propres de h sont donc : $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$

Soit E_{λ_1} le sous-espace propre associé à λ_1.

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Soit encore E_{λ_2}, le sous-espace propre associé à λ_2.

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice de h s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application h est donc la symétrie dans la direction donnée par $(-2;-4;5)$, relativement au plan engendré par les vecteurs $(2;1;0)$ et $(1;0;1)$

3MR

La direction de la symétrie est la droite

$$(x;y;z) = k\cdot(-2;-4;5)$$

et l'équation du plan de symétrie se calcule comme suit:

$$\det\begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = (1;-2;-1)$ est donc normal au plan de symétrie. Son équation est donc

$$\boxed{x - 2y - z = 0}$$