a) Calculer le polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)(2-x) - 2$$

$$= 6 - 5x + x^2 - 2$$

$$= x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

On a donc deux valeurs propres : $\lambda = 1$, $\lambda = 4$

On cherche E_1 et E_4, les espaces propres associés aux deux valeurs propres.

$\boxed{E_1 :}$

$$\begin{array}{c} 3-1 \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad 2-1 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_1 : $(-1 ; 1)$

$\boxed{E_4 :}$ $\begin{pmatrix} \overset{3-4}{-1} & 2 \\ 1 & \underset{2-4}{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une base de E_2 : $(2; 1)$

Matrice de changement de base : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0$$

Deux valeurs propres : $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$

$\boxed{E_2 :}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_3 :}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 2 & 5-x \end{vmatrix} = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Une valeur propre : $\lambda = 3$

$\boxed{E_3 :}$ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La valeur propre est de multiplicité 2, car elle apparait deux fois dans la factorisation du polynôme caractéristique : $(X-3)(X-3)$

Le sous-espace propre associé est de dimension 1. Il n'y a pas assez de vecteurs pour former une base de vecteurs propres – il en faudrait 2.

L'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

d) $\begin{vmatrix} 3-x & 42 & -64 \\ 0 & 3-x & 84 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)(3-x)(2-x)$

Valeurs propres: $\lambda = 3$ et $\lambda = 2$

$\boxed{E_2 :}$ $\begin{pmatrix} 1 & 42 & -64 \\ 0 & 1 & 84 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{aligned} x_1 &= -42x_2 + 64x_3 \\ x_2 &= -84x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3592 \\ -84 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_3 :}$ $\begin{pmatrix} 0 & 42 & -64 \\ 0 & 0 & 84 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ 42x_2 - 64x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vu que $\lambda = 3$ est une valeur propre de multiplicité 2 et que $\dim(E_3) = 1$, il n'y a pas assez de vecteurs propres pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

L'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

e) $$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ 1 & 4-x & 1 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & x-2 & 0 \\ 1 & 4-x & 1 \\ 0 & x-2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(2-x)\left((4-x)(2-x) \overbrace{-(x-2)}^{+(2-x)}\right) \overbrace{-(x-2)}^{+(2-x)}(2-x) =$$

$$(2-x)(2-x)(4-x+1)+(2-x)^2=$$

$$(2-x)^2(5-x+1)=(2-x)^2(6-x)$$

On a $(2-x)^2(6-x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=6$.

Il y a donc 2 valeurs propres : $\lambda=2 \,/\, \lambda=6$

$\boxed{E_2 :}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_2)=2$, c'est un plan.

$\boxed{E_6 :}$ $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

f) $\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (-2-x)\cdot\left((1-x)^2-1\right)$

On développe par rapport au coefficient $(3;3)$

$= -(x+2)\cdot(x^2-2x)$

$= -(x+2)\cdot x\cdot(x-2)$

On a donc $-(x+2)\cdot x\cdot(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=-2 \,/\, x=0 \,/\, x=2$

Il y a trois valeurs propres distinctes, l'endomorphisme est diagonalisable. Il ne reste plus qu'à déterminer une base de chaque sous-espace propre.

$\boxed{E_{-2} :}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 - 3x_2 = 0$$
$$x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = x_3$$

$\boxed{E_0 :}$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = 0$$

$\boxed{E_2 :}$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -x_2$$
$$x_2 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = 0$$

En fin de compte :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$