$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un endomorphisme.

C'est une façon de dire que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

On sait que $g(2;-1) = (1;1)$ et que $g(0;2) = (3;1)$.

Vu que $(2;-1) = 2(1;0) - (0;1)$ et que l'application g est linéaire, on peut écrire :

$$g(2;-1) = g(2(1;0) - (0;1))$$
$$= 2\,g(1;0) - g(0;1) = (1;1)$$

De manière analogue,

$$g(0;2) = g(2\cdot(0;1)) = 2\,g(0;1) = (3;1)$$

Or, les colonnes de la matrice G sont les images des vecteurs $(1;0)$ et $(0;1)$ (base canonique) par l'application g :

$$G = \begin{pmatrix} g(1;0) & g(0;1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$2\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3/2 \\ 1 + 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Image de } u}$

$$G \cdot u = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Image réciproque de } u}$

$$\begin{pmatrix} 5/4 & 3/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x + 6y = -16 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \qquad -4x = -28 \qquad \begin{cases} x = 7 \\ y = -8{,}5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G \begin{pmatrix} 7 \\ -8{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$