$P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, c'est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On a vu que P_2 est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

Une base de P_2 est donnée par

$[x^2, x, 1]$ (Il y en a d'autres.)

$h : P_2 \longrightarrow P_2$ est un endomorphisme ssi, par définition, h est linéaire.

Soit $p = ax^2+bx+c$ et $q = a'x^2+b'x+c'$ deux éléments de P_2 ; soit encore $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$h(\lambda p+\mu q) = h(\lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c + \mu a' x^2 + \mu b' x + \mu c')$

$= h((\lambda a + \mu a')x^2 + (\lambda b + \mu b')x + \lambda c + \mu c')$

$= (\lambda a + \mu a')x^2 \overset{\mathbb{R}}{=} (\lambda a)x^2 + (\mu a')x^2$

$\overset{\mathbb{R}}{=} \lambda \cdot (a x^2) + \mu (a' x^2)$

déf. de h

$= \lambda \cdot h(a x^2 + b x + c) + \mu \cdot h(a' x^2 + b' x + c')$

$= \lambda\, h(p) + \mu\, h(q)$

h est linéaire, donc h est un endomorphisme.

b) On peut utiliser le fait que $P_2 \simeq \mathbb{R}^3$.
En effet, au polynôme $ax^2+bx+c \in P_2$
correspond le vecteur $(a; b; c)$. Cette
correspondance est linéaire et bijective.

Il suffit donc de montrer que $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $h(a;b;c) = (c;b;a)$ est linéaire, ce qui revient à dire que h est un endomorphisme.

$h(\lambda a+\mu a'; \lambda b+\mu b'; \lambda c+\mu c') =$

$(\lambda c+\mu c'; \lambda b+\mu b'; \lambda a+\mu a') =$

$(\lambda c; \lambda b; \lambda a) + (\mu c'; \mu b'; \mu a') =$

$\lambda(c; b; a) + \mu(c'; b'; a') =$

$\lambda \cdot h(a;b;c) + \mu \cdot h(a';b';c')$

Vu que $(\lambda a+\mu a'; \lambda b+\mu b'; \lambda c+\mu c') = \lambda(a;b;c) + \mu(a';b';c')$, h est linéaire.