$\boxed{1.2.36}$

Soit $\mathcal{P} = \{ f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{I} = \{ f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

Soit $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. On définit $f_p \in \mathcal{P}$

et $f_i \in \mathcal{I}$ comme suit :

$$f_p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On voit facilement que $f_p(x) + f_i(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

et donc que $f = f_p + f_i$.

$\Rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$

Or, si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, $f(x) = f(-x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2f(-x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$