$\boxed{1.2.33}$

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ $(x = y = 0)$

Vu que $\begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ 4x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$

$= x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Il s'agit bien d'un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$

On voit facilement que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont lin. indep. Ces deux vecteurs forment donc une base de F.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{Opérations élémentaires}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{1.2.33}_2$

c) $F \cap G$: $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\4\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

On résoud ce système comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Op. élém.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\begin{cases} x = -6 \\ y = -26 \\ z = -86 \\ a = -26 \\ b = 6 \end{cases}$ $\overset{b=1}{\Rightarrow} -2\begin{pmatrix}1\\1\\4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}-1\\-2\\-8\\-3\end{pmatrix}$ est une base de l'équivalent de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$.

$\Rightarrow F \cap G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle$, par exemple