$\boxed{1.2.32}$

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha t + \beta s) \\ -(\alpha t + \beta s) & 0 \end{pmatrix} \in A$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & c' \\ c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha c + \beta c' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha \beta + \beta b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a'' & c'' \\ c'' & b'' \end{pmatrix} \in S$$

$\Rightarrow$ A et S sont bien des sous-espaces

b) $\dim A = 1$ car $A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim S = 3$ car $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée & réduite

$\boxed{1.2.32}_2$

Calculons $A \cap S$: $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad a = b = 0$

$\quad c = t$ et $c = -t \Rightarrow t = 0$ et $c = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = b = c = t = 0 \quad \Rightarrow A \cap S = \{0\}$

Vu que $\dim(A + S) = \dim A + \dim S - \dim(A \cap S)$,

on a $A \oplus S = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.