

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq.

$$|x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Supposons que $x \neq 0$. On a alors

$|x| > 0$, par définition de la valeur absolue.

Posons $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$.

$$0 < \frac{|x|}{2} = \varepsilon < |x|.$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tq. $|x| > \varepsilon$.

C'est une contradiction.