$$x^2+y^2-2x+4y=20$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2-1-4=20$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=25=5^2$$

$$C(1;-2) \quad r=5$$

Soit $t: y=mx+h$ l'équation de la tangente. On écrit les conditions permettant de déterminer m et h:

$$A \in t \Rightarrow 5 = 6m+h$$

$$\Leftrightarrow h = 5-6m$$

$\text{dist}(C;t)=5$ donne l'autre équation.

$$\frac{|y-mx-h|}{\sqrt{1+m^2}}=r \qquad \text{avec } h=5-6m \text{ et } (x;y)=C,\ r=5$$

$$\Rightarrow \frac{|-2-m\cdot 1-(5-6m)|}{\sqrt{1+m^2}}=5$$

$$\Rightarrow |5m-7|=5\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow (5m-7)^2=25(1+m^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{25m^2}-70m+49=25+\cancel{25m^2}$$

$$\Rightarrow m=\frac{24}{70}=\frac{12}{35}$$

$$h=5-6\cdot\frac{12}{35}=\frac{103}{35}$$

$$t_1: y=\frac{12}{35}x+\frac{103}{35} \qquad t_2: x=6$$

La deuxième tangente t_2 est d'équation $x = 6$ car la différence entre la première coordonnée de A et la première coordonnée de C vaut exactement $5 = r$. La tangente t_2 doit alors forcément être verticale.

Calcul des points de contact :

T_2 : $5^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow y = -2$

$\Longrightarrow T_2(6; -2)$

T_1 : On détermine l'équation de la perpendiculaire à t_1 par C :

$$y = -\frac{35}{12}x + h \; ; \; -2 = -\frac{35}{12} + h$$

$$h = -\frac{11}{12}$$

$\Rightarrow \quad 35x + 12y = 11$ est l'équation cherchée.

Il suffit maintenant de calculer l'intersection de la droite t_1 avec la perpendiculaire à t_1 par C :

$$\begin{cases} 35y - 12x = 103 \\ 35x + 12y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -420x + 1225y = 3605 \\ 420x + 144y = 132 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1369y = 3737 \Rightarrow y = \frac{101}{37}$$

$$\Rightarrow x = \left(132 - 144 \cdot \frac{101}{37}\right) \cdot \frac{1}{420} = -\frac{23}{37}$$

$$\Rightarrow T_1 = \left(-\frac{23}{37} ; \frac{101}{37}\right)$$