$$x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+5)^2 - 25 + (y-1)^2 - 1 = -6$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+5)^2 + (y-1)^2 = 20$$

Centre $C(-5;1)$ rayon $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Les points de tangence sont donnés par les intersections de la perpendiculaire à la droite $2x + y = 7$ passant par le centre du cercle :

$d_1 : x - 2y = k$ passant par $(-5;1)$

$-5 - 2 = k$ ; $k = -7$ ; $d_1 : x - 2y + 7 = 0$

$\Rightarrow x = 2y - 7$ à combiner avec

$$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20$$

$$\Rightarrow (2y-7+5)^2+(y-1)^2=20$$

$$\Leftrightarrow (2y-2)^2+(y-1)^2=20$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-8y+4+y^2-2y+1=20$$

$$\Leftrightarrow 5y^2-10y-15=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y-3=0$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y+1)=0$$

$$\Rightarrow y=3 \text{ ou } y=-1$$

Les points de tangence sont donc :

$(-1;3)$ et $(-9;-1)$

On peut maintenant déterminer les équations des parallèles à $2x+y=7$ passant par $(-1;3)$ et $(-9;-1)$.

$d_{//}: 2x+y=k$ par $(-1;3)$

$\Rightarrow -2+3=k \; ; \; k=1$

$\Rightarrow \boxed{2x+y-1=0}$

$d_{//}: 2x+y=k$ par $(-9;-1)$

$\Rightarrow -18-1=k \; ; \; k=-19$

$\Rightarrow \boxed{2x+y+19=0}$