2MR

$\boxed{2.8.6}$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$ Calculons un peu:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h} =$$

$$\frac{1-(x+h)^2-(1-x^2)}{h\cdot\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{\cancel{1}-(\cancel{x^2}+2xh+h^2)\cancel{-1}\cancel{+x^2}}{h\cdot\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$\frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}\cdot\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.8.6

2MR

On a $\lim\limits_{x \to \pm 1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$. La fonction

$f'(x)$ a donc une limite infinie en $x = \pm 1$.

Peut-on calculer la dérivée à l'aide de la définition?

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2} - 0}{h} =$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{1-(1+2h+h^2)}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{-2h-h^2}}{h} =$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h| \cdot \sqrt{-\frac{2}{h} - 1}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} -1 \cdot \sqrt{-\frac{2}{h} - 1}$$

$$= -\infty$$

La pente de la tangente n'est pas bornée au voisinage de 1 : elle tend vers $-\infty$.

2MR

$\boxed{2.8.6}_2$

De même, $\lim\limits_{h \to 0^>} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$

$$\lim_{h \to 0^>} \frac{\sqrt{2h - h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{\frac{2}{h} - 1} = +\infty$$

La fonction admet donc deux tangentes verticales en $x = 1$ et $x = -1$.