2.8.5

2MR

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

On peut le démontrer à l'aide du théorème des deux gendarmes, comme à l'exercice 2.8.4.

Vu que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0$, on a bien

$$f(0) = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

La fonction est donc continue en 0.

$\boxed{2.8.5}_2$

2MR

b) Calculons $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} =$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Lorsque $h \to 0$, $\frac{1}{h} \to \infty$ et donc la limite ci-dessus n'existe pas.

La fonction n'est pas dérivable en $x = 0$.