$$ax^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}$$

Pour assurer l'existence de deux solutions distinctes, il faut que $9-4a>0 \Leftrightarrow a<\frac{9}{4}=2{,}25$.

Il faut également que $a\neq 0$, car sinon la question est dénuée de sens.

Finalement : $a\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]0;2{,}25[$

$$\lim_{a\to 0}\frac{-3-\sqrt{9-4a}}{2a} = «\frac{-3-\sqrt{9}}{2\cdot 0}» = «\frac{-6}{0}»$$

$$=\infty$$

Ce n'est pas cette solution qui nous intéresse.

$$\lim_{a\to 0}\frac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a} = «\frac{0}{0}»$$

Il y a indétermination.

$$\frac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a} = \frac{\left(-3+\sqrt{9-4a}\right)\left(-3-\sqrt{9-4a}\right)}{2a\left(-3-\sqrt{9-4a}\right)} =$$

$$\frac{9-(9-4a)}{2a\left(-3-\sqrt{9-4a}\right)} = \frac{4a}{2a\left(-3-\sqrt{9-4a}\right)} =$$

$$\frac{2}{-3-\sqrt{9-4a}} \xrightarrow{a \to 0} \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

La valeur limite cherchée est donc $-\frac{1}{3}$.