$\boxed{2.4.6}$ 2M R

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n}{2n-1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n}{2n} = 2$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{4n}{2n-1} - 2 \right| = \left| \frac{4n - 4n + 2}{2n-1} \right| =$$

$$\left| \frac{2}{2n-1} \right| = \frac{2}{2n-1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n - 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2n > \frac{2}{\varepsilon} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Posons $N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) + 1$. Le fait que $\forall \varepsilon > 0,\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{4n}{2n-1} - 2 \right| < \varepsilon$ confirme le résultat obtenu au début.

$\boxed{2.4.6}_2$ 2MR

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{-n^2} = -2$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{2n^2}{1-n^2} + 2 \right| = \left| \frac{\cancel{2n^2} + 2 - \cancel{2n^2}}{1-n^2} \right| =$$

$$\left| \frac{2}{1-n^2} \right| = \left| \frac{2}{n^2-1} \right| \underset{\text{si } n>1}{=} \frac{2}{n^2-1}$$

$$\frac{2}{n^2-1} < \varepsilon \iff n^2 - 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\iff n^2 > \frac{2}{\varepsilon} + 1 \iff n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1}$$

Posons $N_\varepsilon = E\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1}\right)$. Le fait que $\forall \varepsilon > 0$, $n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2n^2}{1-n^2} - (-2) \right| < \varepsilon$ montre bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{1-n^2} = -2$

$\boxed{2.4.6}_3$ 2MR

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^3} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{5}{n^3} - 0\right| = \frac{5}{n^3} < \varepsilon \iff n^3 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\iff n > \sqrt[3]{\frac{5}{\varepsilon}}$$

On pose $N_\varepsilon = E\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\varepsilon}}\right) + 1$

et on a bien

$$\forall \varepsilon > 0,\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{5}{n^3} - 0\right| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^3} = 0$, comme prévu!

$\boxed{2.4.6}_4$ 2MR

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 2n \cdot (-1)^n}{n} =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{3 + 2(-1)^n}_{u_n}$

Donnons quelques éléments de u_n :

$5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, \dots$

La suite ne peut donc pas être convergente.

On ne demande pas ici d'argumentation plus détaillée.

$\boxed{2.4.6}_5$ 2MR

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n-1)^4}{(1-n^2)^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n)^4 + \dots}{(-n^2)^2 + \dots}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{16n^4}{n^4} = 16$

Vu que $16n^4$ et n^4 sont les termes de plus haut degré.

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7n^2}{\sqrt{n^4-5}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7n^2}{\sqrt{n^4(1-\frac{5}{n^4})}} =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7n^2}{n^2\sqrt{1-\frac{5}{n^4}}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7}{\sqrt{1-\frac{5}{n^4}}} =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7}{1} = 7$