2MR

$\boxed{2.4.5}_1$

a) $u_n = \dfrac{3}{n-2}$ définie pour $n \geq 3$

On voit que $u_n > 0$ si $n \geq 3$

$$\Rightarrow \left| u_n - 0 \right| = \left| \frac{3}{n-2} - 0 \right|$$

$$= \frac{3}{n-2} < 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{0{,}1} < n-2$$

$$\Leftrightarrow \quad 30 < n-2 \quad \Leftrightarrow \quad n > 32$$

$\Rightarrow N_{0,1} = 32$, car si $n > 32$,

on a $\dfrac{3}{n-2} < 0{,}1$

$\boxed{2.4.5}_2$ 2MR

b) $u_n = \dfrac{n}{n+1} \geqslant 0$ si $n \in \mathbb{N}$

Calculons $|u_n - 1|$:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right|$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$|u_n - 1| < 0{,}25 \iff \frac{1}{n+1} < 0{,}25$$

$$\iff \frac{1}{0{,}25} < n+1 \iff n > 4-1 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{0,25} = 3}$$

2MR

$\boxed{2.4.5}_3$

Démontrons maintenant que les suites sont convergentes : Soit $\varepsilon > 0$

a) $|u_n - 0| = \dfrac{3}{n-2} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad n-2 > \dfrac{3}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{3}{\varepsilon} + 2$

Posons $N_\varepsilon = E\left(\dfrac{3}{\varepsilon} + 2\right) + 1$. On peut donc affirmer que si $n > N_\varepsilon$, alors

$|u_n - 0| < \varepsilon$, ceci $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

b) $|u_n - 1| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad n+1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

$\boxed{2.4.5}_4$ 2MR

Si l'on pose $N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + 1$,

on a bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$