$\boxed{2.4.4}$ 2M1R

a) Vu que $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \leq 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 - \frac{1}{n^2} < 2$$

car $\frac{1}{n^2} > 0 \quad \forall n \geq 1$

La suite a_n est donc bornée.

On a, de plus, si $n \geq 1$

$$n < n+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$$

car $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$ si $x, y > 0$

$\boxed{2.4.4}_2$ 2MR

a) (Suite) Ainsi,

$$-\frac{1}{n^2} < -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2-\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \geqslant 1$$

La suite est donc croissante.

b) On rappelle que $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 > 0$

La suite b_n, ne prenant donc que des valeurs négatives, est donc majorée par -1, car $-n! \leqslant -1 \quad \forall n \geqslant 1$.

Vu que $(n+1)! > n!$, on a $-(n+1)! < -n!$ $\forall n \geqslant 1$. La suite est donc décroissante.

$\boxed{2.4.4}_3$ 2MR

b) (Suite)

Supposons encore, par l'absurde, que $M \in \mathbb{Z}$, $M < 0$, soit un minorant de b_n.

Clairement, $|M|! > |M|$

$\Rightarrow -|M|! < M \Rightarrow b_{|M|} < M$,

ce qui est absurde.

La suite b_n n'est pas minorée, et donc elle n'est pas bornée.

c) Etudions le polynôme $2x^2 - 7x$.

$2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{7}{2} = 3,5$

	0		7/2	
+	0	−	0	+

L'abscisse du sommet de $2x^2 - 7x$ est

$\frac{7}{4} = 1,75 < 2$

$\boxed{2.4.4}$

c) (Suite) Vu la forme de la parabole $2x^2 - 7x = y$, on peut écrire que

$$c_n \geq 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 = 8 - 14 = -6 \quad \forall\, n \geq 2$$

La suite c_n est donc minorée par -6.

De plus, vu que $2x^2 - 7x$ est croissante sur $[7/4 ; +\infty[$, la suite $2n^2 - 7n$ l'est également pour $n \geq 2$.

On peut également démontrer "à la main" que c_n est croissante :

$$2n^2 - 7n < 2(n+1)^2 - 7(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{2n^2} - \cancel{7n} < \cancel{2n^2} + 4n + 2 - \cancel{7n} - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n - 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

ce qui est vrai, vu que $n \geq 2$.

$\boxed{2.4.4}$

c) (Suite) La suite c_n n'est pas majorée. Par l'absurde, supposons le contraire: $\exists\, M > 0$ tq. $2n^2 - 7n < M$ $\forall\, n \geq 2$

$$\Rightarrow 2n^2 - 7n - M < 0 \quad \forall\, n \geq 2,$$

ce qui est absurde, car le polynôme $2n^2 - 7n - M$ prend des valeurs strictement positives pour n assez grand.

d) Il est clair que $d_n > 0$ si $n \geq 3$

La suite est donc minorée.

La suite d_n est décroissante:

$$\frac{n}{n^2+10} > \frac{n+1}{(n+1)^2+10}$$

$\boxed{2.4.4}$

2MR

6

d) (Suite) $\Leftrightarrow \dfrac{n}{n^2+10} - \dfrac{n+1}{(n+1)^2+10} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)^2 + 10n - (n^2+10)(n+1)}{(n^2+10)\left((n+1)^2+10\right)} > 0$$

$$\Leftrightarrow n(n^2+2n+1) + 10n - (n^3+n+10n+10) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^3} + 2n^2 + \cancel{n} + \cancel{10n} - \cancel{n^3} - \cancel{11n} - 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 10 > 0$$

$\Leftrightarrow n^2 > 5$, ce qui est vrai

si $n \geq 3$

$\Rightarrow$ La suite d_n est strictement

décroissante.

$\boxed{2.4.4}_7$ 2MR

f) Montrons que f_n est croissante, par récurrence sur n :

$\boxed{n=1}$ $f_2 = 1+2f_1 = 1+2 = 3 > 1 = f_1$ ✓

$\boxed{n ✓ \Rightarrow n+1 ✓}$

$$f_n < f_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2f_n < 2f_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1+2f_n < 1+2f_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1} < f_{n+2}$$

$$\Longrightarrow f_n < f_{n+1} \Longrightarrow f_{n+1} < f_{n+2}$$

La suite f_n est donc croissante.

$\boxed{2.4.4}$ 2MR

f) (suite) Vu que $f_1 = 1$ et que f_n est croissante, la suite est minorée par 1.

Montrons maintenant que $f_n = 2^n - 1$ $\forall n \geq 1$, par récurrence sur n :

$\boxed{n = 1}$ $f_1 = 1 = 2^1 - 1$ ✓

$\boxed{n ✓ \Rightarrow n+1 ✓}$ Supposons que le résultat soit vrai pour n, $f_n = 2^n - 1$

On a $f_{n+1} = 1 + 2 \cdot f_n = 1 + 2 \cdot (2^n - 1)$

$= 1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1$ ✓

$\Rightarrow f_n = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 1$

La suite n'est donc pas majorée.