

2.4.10
1

2) Par récurrence sur n:

$n=1$ $u_1 = 1 < 4$

$n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark$ Supposons que $u_n < 4$

$\Rightarrow 12 + u_n < 12 + 4$

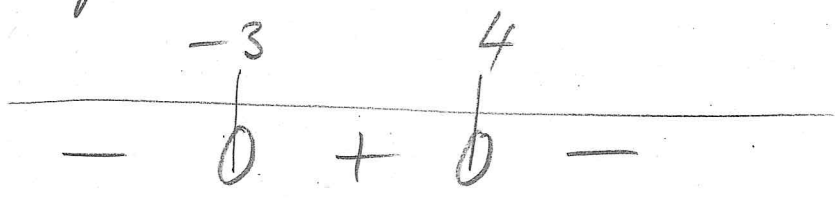
$\Rightarrow \sqrt{12 + u_n} < \sqrt{16} = 4$

$\Rightarrow u_{n+1} < 4$ $\square \checkmark$

b) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (\sqrt{12 + u_n})^2 - u_n^2 =$

$12 + u_n - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n)$

Le signe de $(4-x)(3+x)$ est donné par:



2.4.10

2MR

On en déduit donc que si $x \in]-3; 4[$,

$$(4-x)(3+x) > 0.$$

$\forall n$ que $0 < u_n < 4 \quad \forall n \geq 1$,

$$\text{on a } u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(3 + u_n) > 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}^2 > u_n^2 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante.

c) La suite (u_n) étant croissante et majorée, on peut calculer sa limite:

$$u = \sqrt{12 + u} \Rightarrow u^2 = 12 + u$$

$$\Leftrightarrow u^2 - u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u-4)(u+3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u=4} \text{ ou que } u > 0.$$