a) $$\frac{2s}{1+s^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{1+s^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow s+st^2 = t+ts^2$$

$$\Leftrightarrow (s-t)+st^2-ts^2=0$$

$$\Leftrightarrow (s-t)+st(t-s)=0$$

$$\Leftrightarrow (s-t)(1-st)=0$$

$\Leftrightarrow s=t$ ou $st=1$

Si $s=\frac{1}{2}$ et $t=2$, $f(s)=f(t)$, alors que $s \neq t$ $\left(\frac{2\cdot 1/2}{1+1/4} = \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 2}{1+2^2} \right)$

La fonction f n'est pas injective.

De plus, $\frac{2x}{1+x^2} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2+2x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{4} \in \mathbb{C}$

Il n'y a pas de solution à l'équation

$2 = f(x)$. La fonction n'est pas surjective.

b) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Or, $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Ainsi :

$x^2-2x+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x^2+1 = 1+x^2 \geq 2x \Rightarrow 1 \geq \frac{2x}{1+x^2}$

Vu que $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^2+1 \geq -2x$$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq -\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \frac{2x}{1+x^2}$$

Finalement, $\quad -1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$

et on a bien que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$,

vu que, si $y \neq 0$,

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{y}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\frac{2}{y} \pm \sqrt{\frac{4}{y^2}-4}}{2} = \frac{\frac{2}{y} \pm 2\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}}$$

existe si $y \in [-1; 1]$

et que $y \neq 0$

Si $y = 0$, $\dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc f est surjective sur $[-1; 1]$.

c) Soit maintenant $g : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$

définie par $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

On a vu que si $g(s) = g(t)$, alors

$$(s-t)(st-1) = 0.$$

Or, si $s, t \in [-1; 1]$,

$st - 1 = 0 \Leftrightarrow st = 1 \Leftrightarrow s = t = \pm 1.$

Donc, si $s, t \in]-1;1[$, il faut que $s = t$ pour que $g(s) = g(t)$.

D'après ce qui précède, g est injective sur $[-1;1]$.

On a vu également que pour tout $y \in [-1;1]$,

$$g(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

$$= \frac{1}{y} \pm \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}$$

$$= \frac{1}{y} \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|}$$

Si $y > 0$, on pose $x = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$

$$= \frac{1-(1-y^2)}{y\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}$$

$$= \underbrace{y}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}}}_{\leq 1} < 1$$

Si $y < 0$, on pose $x = \dfrac{1}{y} + \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{|y|}$

$$= \frac{-1}{|y|} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|}$$

$$\Rightarrow \quad -x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{|y|}$$

$$= \frac{1-(1-y^2)}{|y|} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{y^2}{|y|} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \underbrace{|y|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}}}_{\leq 1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad x \geq -1$$

En fin de compte, $-1 \leq x \leq 1$, $x \in [-1 ; 1]$. La fonction g est donc surjective.

Il s'agit bien d'une bijection.