1MR geovect S_3

EXERCICE 1

$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{d} = -9\vec{h}$; $\vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{i}$

$\vec{c} = -2\vec{g}$; $\vec{f}$; $\vec{e}$

EXERCICE 2

(a) $m+4-(-2)\cdot 5 = m+4+10 = 0$

$\Leftrightarrow m = -14$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

(b) $m(m-1) - 3(m+4) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 3m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow (m-6)(m+2) = 0$

$m = 6$ ou $m = -2$

EXERCICE 3

$$\vec{x} + \lambda \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -\lambda \vec{b} + \vec{c}$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & a_1 \\ x_2 & a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -5\lambda + 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda \cdot (-2) - (-5\lambda + 5) \cdot 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6\lambda + 35\lambda - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow 29\lambda = 35 \Leftrightarrow \lambda = \frac{35}{29}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 105/29 \\ -30/29 \end{pmatrix}$$

Exercice 4
Série 3
1MR geoVect

(a)
```
a := matrix ([3, 0, -1]):
b := matrix ([5, 1, 4]):
c := matrix ([13, 2, 7]):
solve (x*a+y*b = c, [x,y]);
```
$\{[x = 1, y = 2]\}$

(b)
```
a := matrix ([2, 1, 3]):
b := matrix ([-1, 2, 1]):
c := matrix ([2, -4, -2]):
solve (x*a + y*b = c, [x,y]);
```
$\{[x = 0, y = -2]\}$

(c)
```
a := matrix ([2, -1, 5]):
b := matrix ([0, 2, 3]):
c := matrix ([6, -11, 4]):
solve(x*a+y*b = c, [x,y]);
```
$\emptyset$

(d)
```
a := matrix ([1, 2/3, -1/3]):
b := matrix ([1/2, -3/4, 1]):
c := matrix ([5, -2, 1/2]):
solve(x*a+y*b = c, [x,y]);
```
$\emptyset$

EXERCICE 5

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(k^2-1)-(k-3)+2(1-3k)=$$

$$2k^2-2-k+3+2-6k = 2k^2-7k+3$$

Les vecteurs sont coplanaires ssi $2k^2-7k+3=0$

Après factorisation: $(2k-1)(k-3)=0$

On trouve deux valeurs possibles pour k:

$k=1/2$ et $k=3$

Exercice 6
Série 3
1MR geoVect

```
A := matrix([[v_1, 1, 0], [v_2, -3, 8], [v_3, 2, -5]]);
```

$$\begin{pmatrix} v_1 & 1 & 0 \\ v_2 & -3 & 8 \\ v_3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

```
B := matrix([[v_1, 35, -2], [v_2, 14, -1], [v_3, -10, 0]]);
```

$$\begin{pmatrix} v_1 & 35 & -2 \\ v_2 & 14 & -1 \\ v_3 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

```
linalg::det(A);
linalg::det(B);
```

$$5 \cdot v_2 - v_1 + 8 \cdot v_3$$

$$20 \cdot v_2 - 10 \cdot v_1 - 7 \cdot v_3$$

```
solve([5*y - x + 8*z = 0, 20*y - 10*x -7*z = 0], [x, y, z])
```

$$\left\{\left[x = -\frac{13 \cdot z1}{2}, y = -\frac{29 \cdot z1}{10}, z = z1\right]\right\}$$

Le vecteur cherché est de la forme suivante:

```
k*matrix([65, 29, -10]);
```

$$\begin{pmatrix} 65 \cdot k \\ 29 \cdot k \\ -10 \cdot k \end{pmatrix}$$

On peut vérifier qu'il satisfait la condition.

```
F := matrix([[65*k, 1, 0], [29*k, -3, 8], [-10*k, 2, -5]]):
```

```
linalg::det(F);
```

$$0$$

```
G := matrix([[65*k, 35, -2], [29*k, 14, -1], [-10*k, -10, 0]]):
```

```
linalg::det(G);
```

$$0$$

$\boxed{\text{Exercice 6 \quad série 3}}_2$ 1MR GeoVect

$$\begin{cases} x - 35z + 2w = 0 \\ -3x + 8y - 14z + w = 0 \\ 2x - 5y + 10z = 0 \end{cases}$$ à résoudre

Notons L_1, L_2, L_3 les trois lignes du système ci-dessus. On résoud le système en faisant des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\boxed{L_2 \longleftarrow 3L_1 + L_2 \quad \text{et} \quad L_3 \longleftarrow -2L_1 + L_3}$$

$$\begin{cases} x \quad -35z + 2w = 0 \\ 8y - 119z + 7w = 0 \\ -5y + 80z - 4w = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{L_3 \longleftarrow \frac{5}{8}L_2 + L_3}$$

$$\begin{cases} x \quad -35z + 2w = 0 \\ 8y - 119z + 7w = 0 \\ \frac{45}{8}z + \frac{3}{8}w = 0 \end{cases} \longrightarrow z = -\frac{w}{15}$$

1MR Geovect

$6S_3$

$$\longrightarrow \quad 8y - 119\cdot\left(-\frac{w}{15}\right) + 7w = 0$$

$$8y = -\frac{224}{15}w \quad ; \quad y = -\frac{28}{15}w$$

$$\longrightarrow \quad x - 35\left(-\frac{w}{15}\right) + 2w = 0$$

$$x = -\frac{7}{3}w - 2w = -\frac{13}{3}w$$

On peut poser $w = 15$, par exemple.

On obtient alors : $x = -65$; $y = -28$

et $z = -1$.

On avait écrit au départ :

$$\underbrace{x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}}_{\text{Le vecteur cherché}} = z\cdot\vec{d} + w\cdot\vec{f}$$

Le vecteur cherché; on le calcule :

$$-65\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + (-28)\begin{pmatrix}0\\8\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-65\\-29\\10\end{pmatrix}$$

ce qui confirme la réponse...

EXERCICE 7

1MR geoVect S_3

(a) $\vec{AB} = (3 \quad -2 \quad 8)$

(b) $\vec{BD} = (-4 \quad -6 \quad -2)$

(c) $\vec{CA} = (7 \quad 6 \quad -4)$

(d) $\vec{AD} = (-1 \quad -8 \quad 6) \qquad \vec{CB} = (10 \quad 4 \quad 4)$

$\vec{AD} + \vec{CB} = (9 \quad -4 \quad 10)$

(e) $\vec{BC} = (-10 \quad -4 \quad -4) \qquad -\vec{AC} = \vec{CA} \qquad \vec{DB} = (4 \quad 6 \quad 2)$

$\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{DB} = (1 \quad 8 \quad -6)$

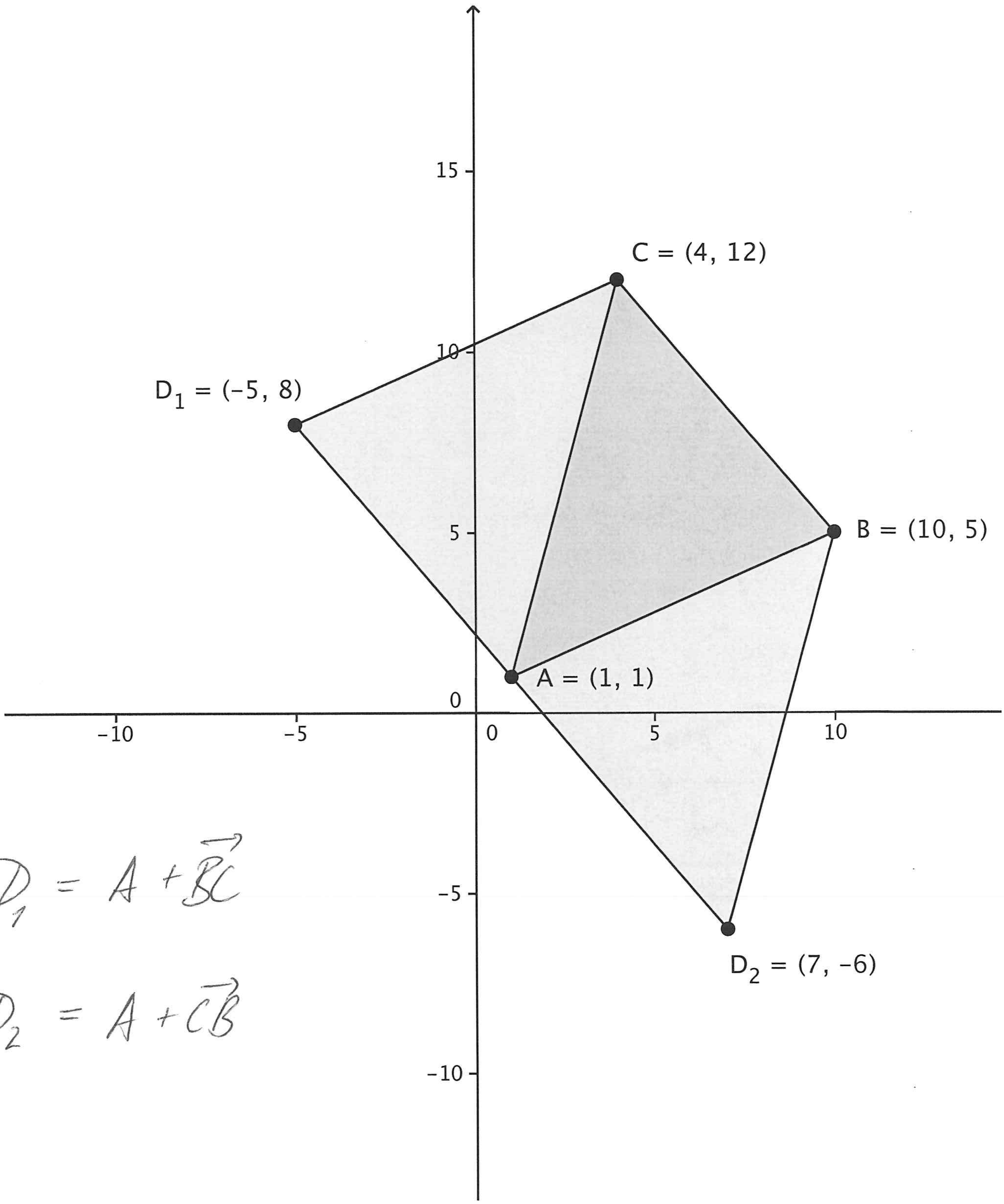
(f) $\vec{CD} = (6 \quad -2 \quad 2) \qquad \vec{CA} + \vec{BC} = (-3 \quad 2 \quad -8)$

$(24 \quad -8 \quad 8) - (-9 \quad 6 \quad -24) =$

$(33 \quad -14 \quad 32) = 4\vec{CD} - 3(\vec{CA} + \vec{BC})$

Exercice 8

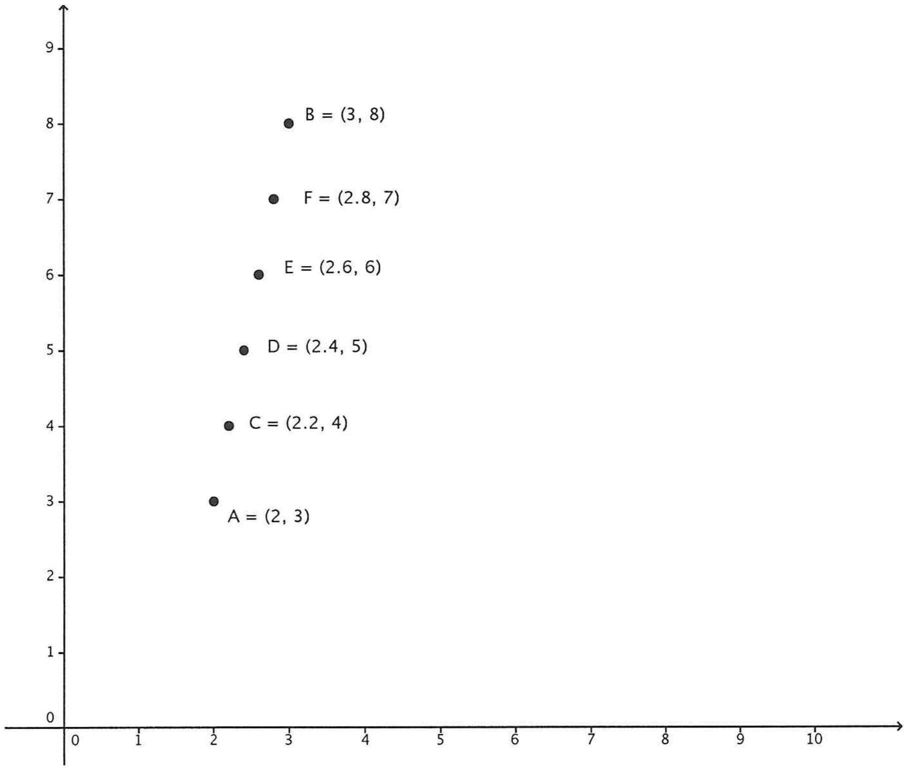
Série 6



$D_1 = A + \vec{BC}$

$D_2 = A + \vec{CB}$

Exercice 9
Série 6



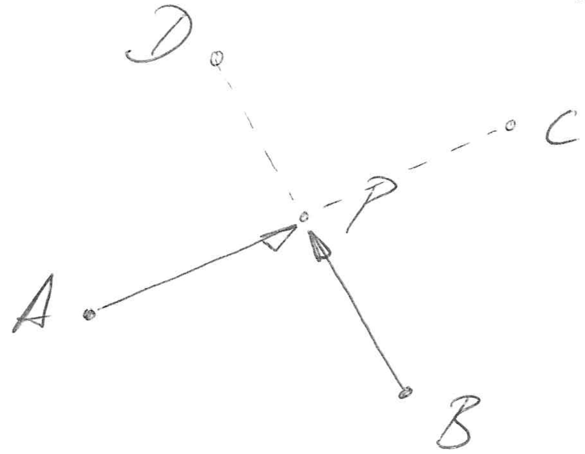
Soit $k \in \{1; 2; 3; 4\}$

Les points cherchés sont de la forme

$$A + \frac{k}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$$

1MR geoVect S_3

Exercice 10



$$C = A + 2\overrightarrow{AP}$$

$\overrightarrow{AP} = (2 \quad 6 \quad 1)$ $\qquad$ $C = (3; -2; 5) + 2 \cdot (2 \quad 6 \quad 1)$

$C = (7 \quad 10 \quad 7)$

$D = B + 2\overrightarrow{BP}$ $\qquad$ $D = (7; 5; 10) + 2(-2 \quad -1 \quad -4)$

$\overrightarrow{BP} = (-2 \quad -1 \quad -4)$ $\qquad$ $D = (3; 3; 2)$

Exercice 11

$$\overrightarrow{MN} \stackrel{?}{=} k \cdot MP$$

$$\overrightarrow{MN} = (-18 \quad 12 \quad 24)$$

$$\overrightarrow{MP} = (-51 \quad 34 \quad 58)$$

La condition s'écrit :

$$-18 = -51\,k \qquad k = \frac{18}{51}$$

$$12 = 34\,k \qquad k = \frac{12}{34}$$

$$24 = 58\,k \qquad k = \frac{24}{58}$$

Les points ne sont donc pas alignés.

Exercice 12

(a) $\det(\vec{AB}\,;\vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & k-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4-(k-1)=0$

$\Leftrightarrow k = 5$

(b) $\det(\vec{AC}\,;\vec{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -6 & 25-7k \\ 2-k & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -7k^2+39k-32 = 0$

$\Leftrightarrow k=1, \quad k = \frac{32}{7}$

EXERCICE 13

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & \alpha-5 \end{pmatrix}$

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$

$\Leftrightarrow$ $1 = 3k$; $2 = 6k$; $3 = k(\alpha - 5)$

$\Leftrightarrow$ $k = 1/3$; $3 = \frac{1}{3}(\alpha - 5)$

$\Leftrightarrow$ $k = 1/3$; $9 = \alpha - 5$; $\alpha = 14$

$\Rightarrow$ $C = (5; 9; 14)$

Exercice 13

1MR geoVect S_3

(b) On doit avoir $\vec{AB} = k \cdot \vec{CB}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\alpha & 4 & 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 & -\alpha-1 & -\alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-\alpha = 3k \quad \& \quad 4 = k(-\alpha-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3-\alpha}{3} = k \qquad k = \frac{4}{(-\alpha-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (3-\alpha)(-\alpha-1) = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha+3)(\alpha-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = -3 \quad \text{et} \quad \alpha = 5$$

Il y a donc deux valeurs possibles.

Exercice 14

1MR geoVect S_3

On peut supposer que $C = (x;0)$
ou que C est sur l'axe Ox.

$$\boxed{C \text{ est aligné avec } A \text{ et } B \Leftrightarrow \vec{AC} = k\vec{AB}}$$

$\vec{AC} = (x-7 \quad 3)$ $\quad \vec{AB} = (16 \quad -3)$

La condition s'écrit donc :

$$(x-7 \quad 3) = k(16 \quad -3)$$

$\Leftrightarrow \quad x-7 = 16k; \quad 3 = -3k$

$\Leftrightarrow \quad k = -1; \quad x-7 = 16(-1)$

$\Leftrightarrow \quad k = -1; \quad x = 7-16 = -9$

Le point cherché est $C(-9;0)$

Exercice 15

On ne connait pas les coordonnées du point P. Posons $P = (x; y)$

Si P est l'intersection de AB et CD, on peut écrire

$$P = A + k\,\vec{AB}$$

$$P = C + k \cdot \vec{CD}$$

$$(x; y) = (-2; 14) + k \cdot (8 \quad -16)$$

$$(x; y) = (4; -2) + k\,(2 \quad 12)$$

Ce qui donne

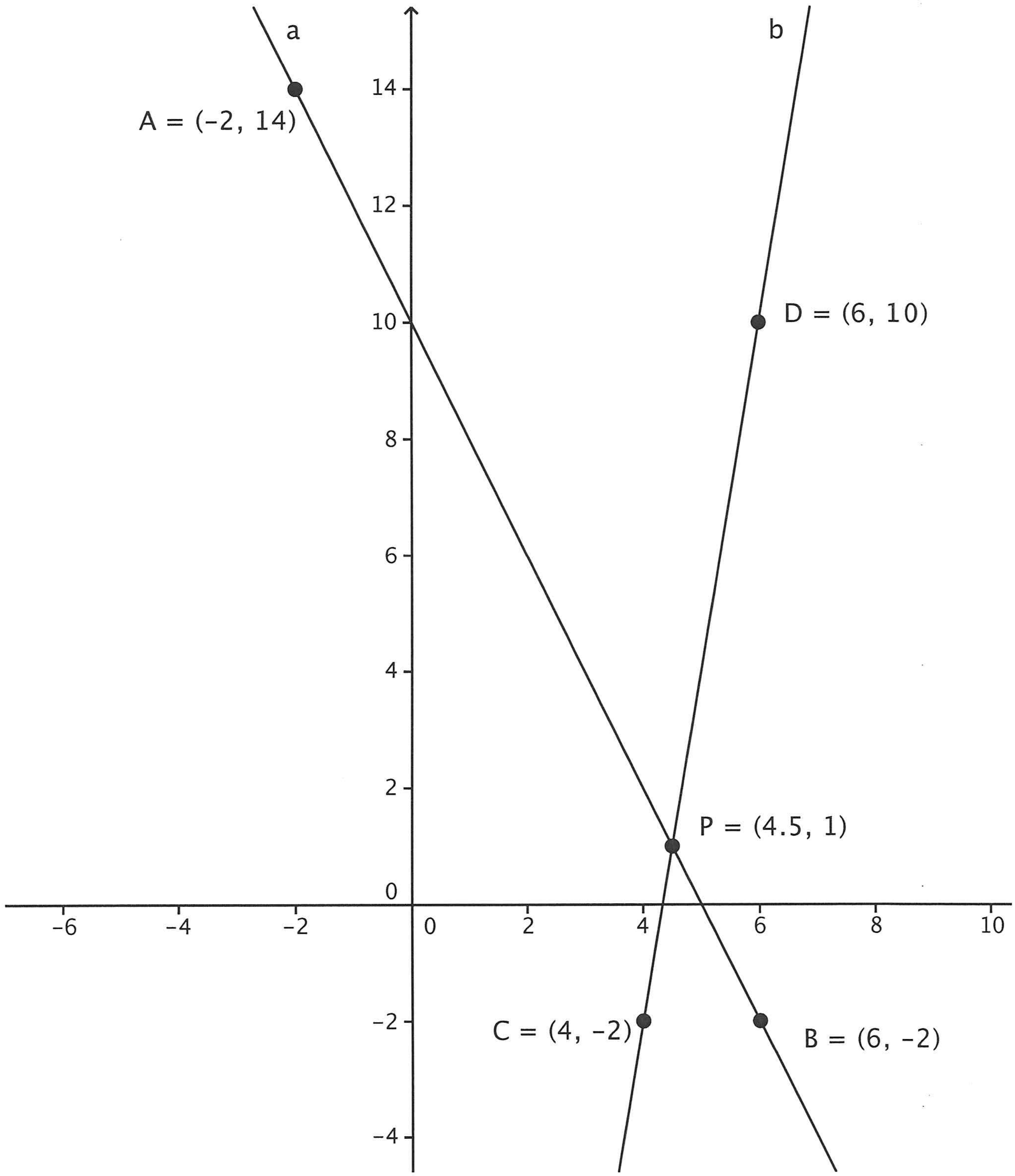
$$x = -2 + 8k$$

$$y = 14 - 16k$$

$$x = 4 + 2k$$

$$y = -2 + 12k$$

Exercice 15
Série 6



Exercice 16

1MR geoVect

S_3

(a) $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont-ils colinéaires ?

$\vec{AB} = (-2 \quad -4 \quad 2) \qquad \vec{CD} = (4 \quad -4 \quad 2)$

$\vec{AB} = k \cdot \vec{CD} \iff -2 = 4k \;\&\; -4 = -4k \;\&\; 2 = 2k$

$\iff k = -0{,}5 \;\&\; k = 1 \;\&\; k = 1$

$\Rightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

Les droites $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ se coupent-elles ?

$A + k \cdot \vec{AB} \overset{?}{=} C + m \cdot \vec{CD}$

$\iff (6-2k ; 4-4k ; -4+2k) = (7+4m ; -4m ; -2+2m)$

$\iff 6-2k = 7+4m \; ; \; 4-4k = -4m \; ; \; -4+2k = -2+2m$

$\iff 6-2k = 7+4(k-1) \; ; \; -4+2k = -2+2(k-1)$

$\iff 6-2k = 7+4k-4 \; ; \; -4+\cancel{2k} = -2+\cancel{2k}-2$

$\iff 6k = 3 \; ; \; -4 = -4$

$\iff k = 1/2 \; ; \; m = -1/2$

Les droites sont donc sécantes.

Exercice 16 (b)
Série 3

```
pointA := matrix([-4, 2, 1]);
pointB := matrix([-1, 1, 3]);
pointC := matrix([0, 5, 2]);
pointD := matrix([9, 2, 4]);
```

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

```
AB := pointB - pointA
```

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
CD := pointD - pointC
```

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
solve(AB - k * CD = 0, k)
```

$\emptyset$

```
solve(pointA + k * AB = pointC + m * CD, {k, m})
```

$\emptyset$

Les droites sont gauches

Exercice 17

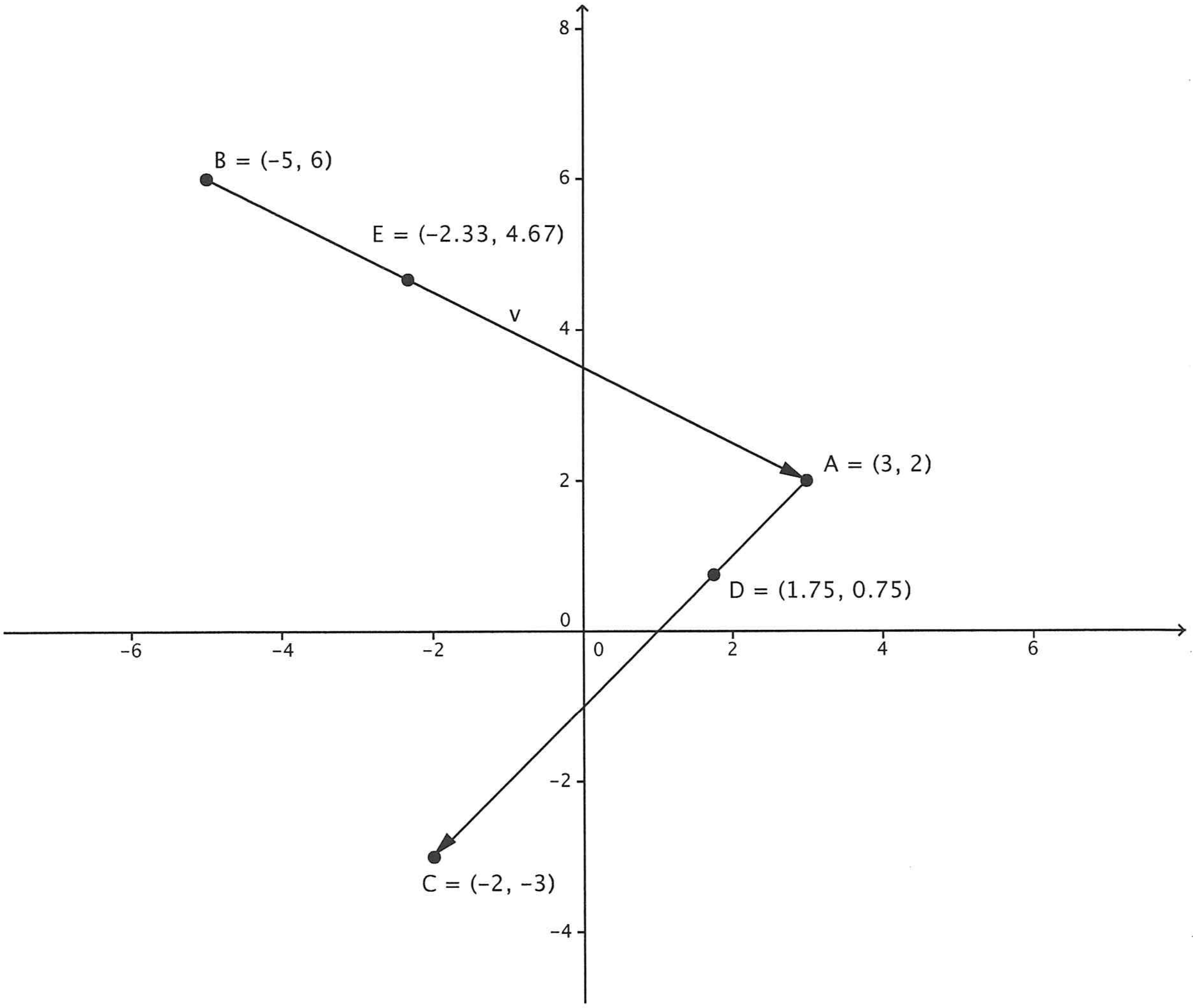
Soit P le point situé au quart de [AB] depuis A.

$$P = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Soit Q le point situé aux deux tiers de [BC] depuis B.

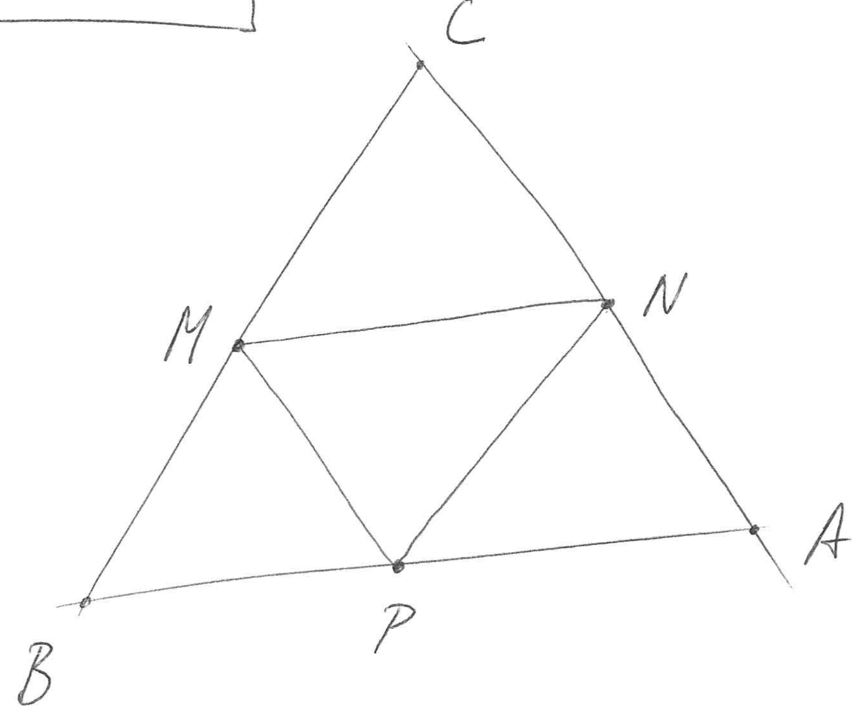
$$Q = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Exercice 17
Série 3



Exercice 18

1MK geoVect S_3



D'après le théorème du segment moyen,

on a $\vec{BA} = 2\vec{MN}$.

Donc $A = P + \vec{MN}$

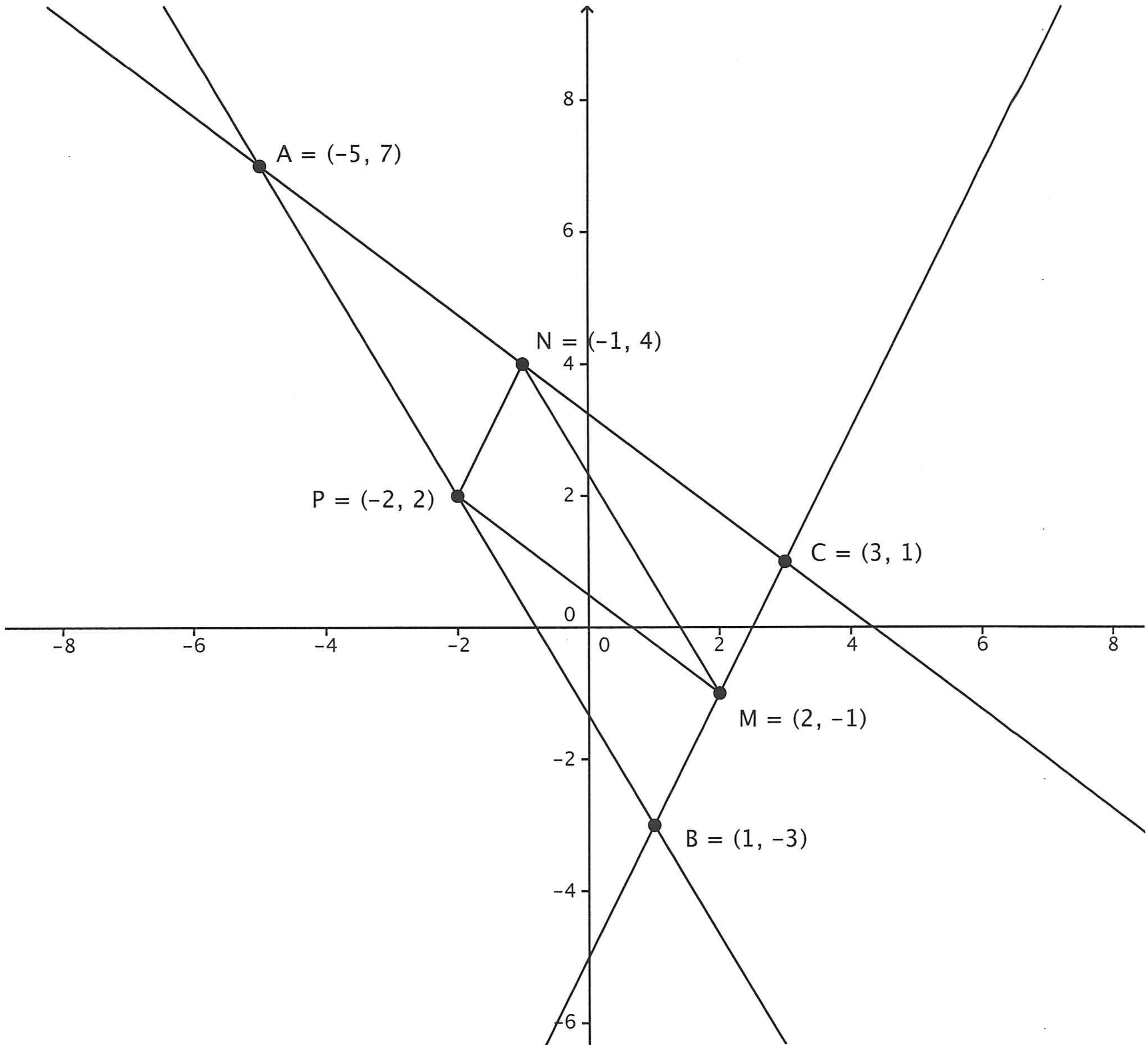
De manière analogue,

$$C = M + \vec{PN} = N + \vec{PM}$$

et $B = M + \vec{NP}$

Exercice 18

Série 6



1MR geoVect

S_3

Exercice 20

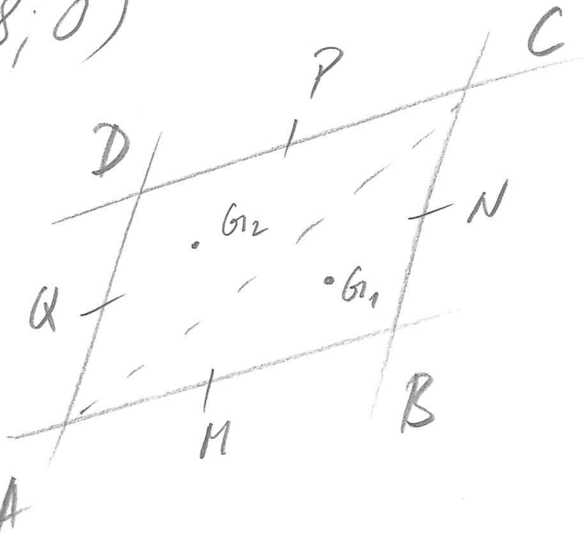
$\vec{AB} = (8 \quad 2 \quad 3)$

$D = C - \vec{AB} = (-4; -8; 0)$

$\vec{BC} = (0 \quad -9 \quad -3)$

$\vec{CD} = (-8 \quad -2 \quad -3)$

$\vec{DA} = (0 \quad 9 \quad 3)$



$M = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (0; 2; \frac{9}{2})$

$N = B + \frac{1}{2}\vec{BC} = (4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$

$P = C + \frac{1}{2}\vec{CD} = (0; -7; \frac{3}{2})$

$Q = D + \frac{1}{2}\vec{DA} = (-4; -\frac{7}{2}; \frac{3}{2})$

$G_1 = \frac{1}{3}(A+B+C) = (\frac{4}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad 4)$

$G_2 = \frac{1}{3}(A+C+D) = (-\frac{4}{3} \quad -\frac{13}{3} \quad 2)$